



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Algunos resultados de la geometría euclidiana a través
del álgebra geométrica bidimensional**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Henry Cristhian ZUBIETA ROJAS

ASESOR

Dr. Edgar Diógenes VERA SARAVIA

Lima, Perú

2020



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Zubieta, H. (2020). *Algunos resultados de la geometría euclidiana a través del álgebra geométrica bidimensional*. Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código ORCID del autor	https://orcid.org/0000-0001-9441-1369
DNI o pasaporte del autor	43404788
Código ORCID del asesor	https://orcid.org/0000-0002-3634-8549
DNI o pasaporte del asesor	07915698
Grupo de investigación	—
Agencia financiadora	—
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	Perú, Ciudad Universitaria - UNMSM, Av. República de Venezuela 3400, Cercado de Lima. 12°03'36.2"S 77°04'55.3"W
Disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA



FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN MODALIDAD VIRTUAL

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN MATEMÁTICA PURA

Siendo las, 16.30 horas del día viernes veinticuatro de julio del dos mil veinte, en la sala virtual meet.google.com/nqp-dvjq-ydk, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE : Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO : Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
MIEMBRO : Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
MIEMBRO ASESOR : Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: « ALGUNOS RESULTADOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA A TRAVÉS DEL ALGEBRA GEOMÉTRICA BIDIMENSIONAL » presentada por el Bachiller Henry Cristhian Zubieta Rojas para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

PÚBLICO ASISTENTE:

Nº	Nombres y Apellidos	Nº DNI
1	Edgar Diogenes Vera Saravia	07915698
2	Pedro Celso Contreras Chamorro	07699566
3	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya	41075852
4	Josue Alonso Aguirre Enciso	41341744
5	Henry Cristhian Zubieta Rojas	43404788
6	Alfonso Pérez Salvatierra	06445739
7	Roxana López Cruz	10798114

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por la graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller Henry Cristhian Zubieta Rojas el calificativo de

MUY BUENO (17)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al **Bachiller Henry Cristhian Zubieta Rojas**.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA



FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO

Siendo las 17.20 .horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

1. FIRMAS DE LOS MIEMBROS DEL JURADO

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
PRESIDENTE

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
MIEMBRO

Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
MIEMBRO

Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia
MIEMBRO ASESOR

A mis padres Edwin Medelio Zubieta Romero y Maria Luz Rojas Alor
por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.

Agradezco al doctor Edgar Vera Saravia, por su buena orientación ya que gracias a sus valiosas aportaciones se hizo posible esta tesis y, sobre todo, por su amistad.

Agradezco al doctor Pedro Contreras Chamorro, por sus sugerencias en la redacción de la tesis.

Agradezco a mis padres y hermanos por estar siempre conmigo, por apoyarme en todo momento, por ser parte muy importante de mi vida y por su ejemplo de unidad familiar.

Resumen

Utilizando la idea del Erlanger Programm de Felix Klein, en el sentido que los docentes de matemática deben conocer los temas de matemática básica desde un punto de vista avanzado. En nuestro caso, algebrizaremos la geometría euclidiana usando el álgebra geométrica bidimensional.

El aspecto avanzado de los espacios afines reside en el hecho de que se trata de un tipo de variedad con una característica muy particular: Tanto la variedad como su fibrado tangente son representados en un mismo ambiente.

Si bien los productos escalares y exteriores son suficientes para resolver muchos problemas geométricos, otros problemas emblemáticos como la recta de Euler de un triángulo o el teorema de Fermat pueden ser mejor resueltos usando el producto geométrico. De esta manera se mostrará que el álgebra geométrica, que será definida, se presenta como una adecuada herramienta para estudiar y transmitir la geometría plana.

Abstract

Using the idea of Felix Klein's Erlanger Programm, in the sense that teachers of mathematics must know the subjects of basic mathematics from an advanced point of view. In our case, we will algebraize Euclidean geometry using two-dimensional algebra geometric.

The advanced aspect of the related spaces lies in the fact that it is a type of variety with a very particular characteristic. Both the variety and its tangent bundle are represented in the same environment.

Although scalar and exterior products are sufficient to solve many geometric problems, other emblematic problems such as the Euler line of a triangle or Fermat's theorem can only be solved using the geometric product. In this way it will be shown that the geometric algebra, which would be defined, is presented as a suitable tool for studying and transmitting plane geometry.

Índice General

Índice de figuras	x
Índice de Cuadros	xii
Lista de Símbolos	xiii
1. Sobre la estructura matemática a ser usada	3
1.1. El álgebra geométrica bidimensional $AG(2)$	3
1.2. Algebrizando la geometría 1	6
1.2.1. Una definición de ángulo orientado	7
1.2.2. Precisando los multivectores	8
1.2.3. Ortogonalidad y colinealidad	10
1.3. Algebrizando la geometría 2	18
1.3.1. Reflexiones	18
1.3.2. Rotaciones	18
1.3.3. Inversiones	20
1.3.4. Dilataciones	21
1.3.5. Traslaciones	21

1.4.	\mathbb{R} -espacios afines bidimensionales	21
1.5.	Notación y terminología	21
1.5.1.	Visión alternativa de \mathbb{R} -espacio vectorial	22
1.5.2.	Versión kleiniana de \mathbb{R} -espacio vectorial	23
1.5.3.	El espacio afín \mathbb{E}^2	24
1.5.4.	El espacio euclidiano bidimensional \mathbb{E}^2	26
1.6.	Operaciones con vectores libres	31
2.	Sobre triángulos	33
2.1.	Área orientada de un triángulo	33
2.1.1.	Medianas y centroide	35
2.1.2.	Bisectores perpendiculares y el circuncentro	39
2.1.3.	Bisectrices e incentro	43
2.2.	Altura y ortocentro	46
2.3.	Recta de Euler	49
2.4.	El Punto de Fermat	51
3.	Sobre similaridad y razón singular	55
3.1.	Similaridad directa	55
3.2.	Similaridad opuesta	57
3.3.	El Teorema de Menelao	60
3.4.	El Teorema de Ceva	62
4.	Sobre círcunferencias	66
4.1.	Ecuación algebraica de la circunferencia.	66

4.2. Intersección de una recta con una circunferencia.	67
4.2.1. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia	69
4.3. Ecuación polar	70
4.3.1. Inversión con respecto a una circunferencia	71
4.4. La circunferencia de los nueve puntos	76
4.5. Sobre el ángulo orientado inscrito en una circunferencia	80
4.6. Cuadriláteros cíclicos y circunscritos	82
4.7. Ángulo entre circunferencias	90
4.8. Eje radical de dos circunferencias	92
5. Sobre la trigonometría	95
5.1. Suma de ángulos orientados de un polígono	95
6. Conclusiones	98
Bibliografía	99

Índice de figuras

1.1. Ángulos orientados	7
1.2. Descomposición ortogonal de un vector	10
1.3. Producto geométrico de w y z	17
1.4. Reflexión de w sobre una recta l	18
1.5. Inversión de un vector	20
1.6. Dilatación de un vector	21
1.7. Traslación paralela	27
1.8. Criterio del paralelogramo	28
1.9. Suma de vectores trasladados	28
1.10. Producto geométrico de los vectores w y z	29
1.11. Bases ortonormales orientadas	30
1.12. Reflexión de un vector	30
2.1. Propiedades de los triángulos	35
2.2. Medianas y centroide	36
2.3. Bisectores perpendiculares y el circuncentro	40
2.4. Bisectriz de un ángulo.	44
2.5. Bisectores angulares e incentro	44

2.6. Altura y ortocentro	46
2.7. Relación de áreas triangulares	48
2.8. Punto de Fermat F	52
2.9. Triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$ y punto interior P	53
3.1. Vectores geoméricamente proporcionales.	55
3.2. Similaridad directa para polígonos	57
3.3. Similaridad opuesta para polígonos	59
3.4. Teorema de Menelao	61
3.5. Teorema de Ceva	63
4.1. Intersección de una recta con una circunferencia	67
4.2. Potencia de un punto P con respecto a una circunferencia	69
4.3. Ecuación polar	71
4.4. Ecuación polar para un punto de la circunferencia	71
4.5. Inversión con respecto a una circunferencia	72
4.6. Transformación a través de una circunferencia de inversión de centro F	74
4.7. La circunferencia de los nueve puntos	77
4.8. Distancias relativas entre los puntos notables	80
4.9. Ángulo inscrito en una circunferencia	80
4.10. Teorema de Ptolomeo	84
4.11. Cuadrilátero circunscriptible	89
4.12. Circunferencias secantes	91
4.13. Eje radical de dos circunferencias	92

4.14. Eje radical de tres circunferencias	94
---	----

5.1. Suma de ángulos orientados de un polígono	96
--	----

Índice de Cuadros

1.1. Producto geométrico de m_0, m_1, m_2 y m_{12}	4
1.2. Producto geométrico de u_0, u_1, u_2 y u_{12}	5
1.3. Producto de 1 y u_{12}	14

Lista de Símbolos

$<:$	Subconjunto, 3
$\mathbb{R}^{2 \times 2}:$	Conjunto de matrices cuadradas 2×2 con entradas reales, 3
m_0, m_1 y $m_2:$	Matrices de Dirac, 4
$m_{12}:$	Es el producto de m_1 y m_2 , 4
u_1 y $u_2:$	Vectores en \mathbb{R}^2 , 5
$\delta_{ij}:$	Delta de Dirac, 5
$\oplus:$	Suma directa, 6
$\Delta:$	Familia de vectores opuestos y unitarios, 6
$S^1:$	Conjunto de vectores unitarios en \mathbb{R}^2 , 6
$\sim:$	Relación de equivalencia, 7
$< a, b >:$	Clase de equivalencia de $(a, b) \in S^1 \times S^1$, 7
$\angle(a, b):$	Ángulo orientado de a hacia b , 7
$\mu \angle(a, b):$	Medida del ángulo orientado de a hacia b , 7
$\frac{S^1 \times S^1}{\Delta}:$	Conjunto de pares de vectores con una única medida orientada, 8
$u \uparrow v:$	Producto exterior de los vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$, 8
$u.b:$	Producto interior de los vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$, 8
$\rho_u:$	Reflexión respecto de la recta l generada por $u \in S^1$, 18
$\rho_{2\theta}:$	Rotación orientada (en el ángulo orientado 2θ), 19
$\gamma_r:$	Inversión de radio r y centro $c \in \mathbb{R}^2$, 20
$d:$	Dilatación de un vector, 21
$\tau_r:$	Traslación del vector r , 21
$\mathcal{B}(2):$	Grupo de biyecciones de \mathbb{R}^2 , en si mismo, 21
$Gl(2):$	Grupo lineal de \mathbb{R}^2 , 22
$\mathcal{B}(\mathbb{E}, 2):$	Familia de biyecciones de \mathbb{E}^2 en \mathbb{R}^2 , 22
$U \leq V:$	U es un subgrupo de V , 22
$\mathfrak{A}(V):$	Atlas de V , 23
$\mathcal{G}(V):$	Grupo estructural de V , 23
$\mathcal{O}(2):$	Grupo ortogonal de \mathbb{R}^2 , 24

$\mathbb{E}^2 :$	Espacio afín, 24
$T_P\mathcal{A} :$	Espacio tangente de \mathcal{A} en P , 25
$PQ :$	Vector libre, 25
$\mathcal{P} :$	Representación del plano euclidiano \mathbb{E}^2 , 26
$\mathfrak{R}_2 :$	Matematización de \mathbb{E}^2 , 26
$\underline{PQ} :$	Vector tangente a \mathbb{E}^2 , con origen en $(0,0)$, 27
$u \perp v :$	u es ortogonal a v , 29
$u \parallel v :$	u es paralelo a v , 29
$A_{PQR} :$	Área de un triángulo P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$, 34
$\mathcal{M}_{PQ} :$	Bisector perpendicular de un segmento de extremos P y Q , 39
$\mathcal{B}\angle(u, v) :$	Bisectriz del ángulo orientado de u hacia v , 43
$d(A, B) :$	Distancia entre los puntos A y B , 66
$ \cdot :$	Norma euclidiana, 66
$\mathcal{C}(F, r) :$	Círculo de centro F y radio r , 66
$\triangle ABC :$	Triángulo con vértices en \mathbb{E}^2 , 76
$\square ABCD :$	Cuadrilátero con vértices en \mathbb{E}^2 , 76
$S_{ABCD} :$	Área de un cuadrilátero con vértices en \mathbb{E}^2 , 82
$(A, B, C, D) :$	Razón doble de los puntos en \mathbb{E}^2 , 83

Introducción

Existen formalismos matemáticos, nacidos en el siglo XIX y perfeccionados en el siglo pasado, que son poco conocidos, uno de ellos es el Álgebra Geométrica, este modelo matemático, permite el estudio, presentación y aplicación de la geometría euclidiana bidimensional, obteniéndose resultados invariantes y libre de coordenadas. Su elección se debe a que ofrece naturalidad y simplicidad para unificar y generalizar conceptos conocidos, lo cual permite una mejor comprensión y uso del álgebra y la geometría. No existe un resultado principal sobre el que converge todo lo hecho en el primer capítulo, la naturaleza de este trabajo es reescribir las herramientas necesarias para poder obtener cambios significativos en muchos resultados que aparecen en los libros: (Berger, 2009) y (Moise, 1990) y así emular lo hecho por Felix Klein, es decir hacer matemática básica desde un punto vista superior, en nuestro caso, desde el enfoque del álgebra geométrica bidimensional. Seguiremos el orden sugerido por el Dr. Josue Enciso Aguirre.

En el Capítulo 1 se bosqueja el álgebra geométrica bidimensional, este permitirá la algebrización de conceptos geométricos como, por ejemplo, el ángulo orientado, entre otros, necesarios para mostrar la algebrización de teoremas clásicos.

En el Capítulo 2 se reescriben con el enfoque del álgebra geométrica, algunos resultados geométricos ligados a los triángulos, siendo de vital importancia para todo esto, los espacios afines Kleinianos, ya que con ello, podremos conseguir resultados invariantes realizando operaciones entre vectores libres.

En el Capítulo 3 estudiamos la definición de similaridad directa y opuesta, lo que permitirá entender con precisión el teorema de Menelao y el teorema de Ceva.

En el Capítulo 4 se hace un tratamiento de la circunferencia, desde el punto de vista del álgebra geométrica bidimensional, dejamos de lado su representación como ecuación cartesiana, ya que los resultados reescritos de la geometría euclidiana, van a prescindir de sus coordenadas. Así se podrá abordar con mayor convicción el Teorema de la circunferencia de los nueve puntos, también conocido como el Teorema de Feuerbach.

En el Capítulo 5 se presentan las identidades básicas de la trigonometría elemental deducidas en estrecha relación con hechos geométricos básicos y así mostrar un resultado que muestra que la suma de los ángulos orientado en todo polígono es $\pi(n - 2)$ siendo n el número de lados del polígono orientado.

En el Capítulo 6, aparecen las conclusiones de este trabajo de tesis.

Capítulo 1

Sobre la estructura matemática a ser usada

En su Erlanger Programm de 1908 Felix Klein propuso, “Un docente puede abordar con mayor solvencia y convicción el tema de matemática que le corresponda transmitir a sus alumnos, estudiando previamente dicho tema desde un punto de vista matemático avanzado”. Felix Klein plasmó sus ideas en su libro, para docentes preuniversitarios de matemática: Matemática básica desde un punto de vista superior (Klein, 2006), acorde con la evolución hasta el siglo XIX.

En este contexto ofrecemos una versión matemática amigable de dos temas que enriquecen las demostraciones geométricas clásicas mediante demostraciones algebraicas de las mismas.

1.1. El álgebra geométrica bidimensional $AG(2)$

El Álgebra Geométrica Bidimensional $AG(2)$ permite mejorar y ampliar el conocido encaje de álgebras determinado por los reales y complejos (\mathbb{R} es subálgebra de \mathbb{C}), (Yaglom, 2009)

$$\mathbb{R} < \mathbb{C}. \tag{1.1.1}$$

Como sabemos, los complejos extendieron el análisis real e incluyeron de modo indirecto algunos aspectos geométricos como las rotaciones.

Se presenta $AG(2)$ como una abstracción del álgebra no conmutativa de matrices reales

\mathbb{R}^2 y extendemos el siguiente encaje de álgebras reales, (Vera Saravia, 2016)

$$\mathbb{R} < \mathbb{C} < AG(2). \quad (1.1.2)$$

Las matrices pertenecientes al álgebra de matrices reales $\mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$m_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad m_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tienen propiedades realmente maravillosas,

$$\{m_0, m_1, m_2, m_1 m_2 := m_{12}\}$$

es una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, como \mathbb{R} -espacio vectorial, precisamente

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = \{a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_{12}; a_j \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1.3)$$

Explícitamente los elementos de la base son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los productos entre estas matrices determinan la siguiente tabla multiplicativa,

m_0	m_1	m_2	m_{12}
m_1	m_0	m_{12}	m_2
m_2	$-m_{12}$	m_0	$-m_1$
m_{12}	$-m_2$	m_1	$-m_0$

Cuadro 1.1: Producto geométrico de m_0 , m_1 , m_2 y m_{12} .

Esto motiva la siguiente abstracción del álgebra geométrica bidimensional, $AG(2)$.

Definición 1.1 *El Álgebra Geométrica Euclidea Bidimensional $AG(2)$ es:*

1. Un \mathbb{R} -**espacio vectorial** generado por u_1 , u_2 y $u_1 u_2$,

$$AG(2) := \{a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1 u_2; a_j \in \mathbb{R}\}.$$

*sus elementos serán llamados **2-números geométricos**.*

2. Provisto de un producto, llamado **producto geométrico**, que es una aplicación \mathbb{R} -bilineal asociativa pero no conmutativa,

$$AG(2) \times AG(2) \longrightarrow AG(2),$$

que se procesa utilizando la distributividad establecida por la bilinealidad, la asociatividad y la siguiente tabla:

1	u_1	u_2	u_{12}
u_1	1	u_{12}	u_2
u_2	$-u_{12}$	1	$-u_1$
u_{12}	$-u_2$	u_1	-1

Cuadro 1.2: Producto geométrico de u_0 , u_1 , u_2 y u_{12} .

La suma en $AG(2)$ es como la suma de polinomios. Una forma de expresar lo obtenido en la tabla 1.2, es mediante las **condiciones de Dirac**,

$$u_i u_j + u_j u_i = 2\delta_{ij} \text{ con } i, j \in \{1, 2\}. \quad (1.1.4)$$

Es pertinente precisar las operaciones del $AG(2)$. Su estructura vectorial nos permite sumar números geométricos, pero para multiplicar números geométricos debemos tener cuidado, ya que, si bien se trata de un proceso similar al producto de polinomios en el sentido que podemos usar la distributividad y la asociatividad pero no la conmutatividad, porque el producto geométrico proviene del producto de matrices que no es conmutativo y en su lugar debemos utilizar la tabla 1.2. En adelante usaremos $u_{12} := u_1 u_2$. Dados

$$A = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_{12} \text{ y } B = b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_{12} \in AG(2),$$

se demuestra que su producto geométrico, está en $AG(2)$; es decir,

$$AB = c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_{12} \in AG(2), \quad (1.1.5)$$

donde, usando la tabla 1.2

$$c_0 = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3,$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3,$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

De otro lado,

- Identificando u_1 y u_2 con la base canónica $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , tenemos que $AG(2)$ contiene una copia linealmente isomorfa de \mathbb{R}^2 , que respeta el producto interno, el producto exterior, la norma y la distancia.
- Como $(u_{12})(u_{12}) = -1$, usando la identificación $u_{12} \equiv i \in \mathbb{C}$, explicitamos que $AG(2)$ contiene una copia linealmente isomorfa de los números complejos \mathbb{C} que preserva la estructura de álgebra.
- Los resultados anteriores determinan el isomorfismo, como \mathbb{R} -espacios vectoriales

$$AG(2) \equiv \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{C}. \quad (1.1.6)$$

En este nuevo contexto, usando la tabla 1.2 del producto geométrico, se pueden verificar resultados algebraicos-geométricos,

1.2. Algebrizando la geometría 1

El álgebra geométrica permite la algebrización de la geometría euclidiana. En tal sentido, nos limitaremos a:

1. Precisar algunos aspectos con mayor precisión que en el contexto tradicional: *ángulo orientado*, *medida de ángulo orientado*, entre otros elementos.
2. Adaptaremos los conceptos euclidianos de ángulo interno determinado por un par de semirrectas y el de medida angular.
3. Usaremos la medida angular en radianes con valores en $] -\pi, \pi]$ para evitar ambigüedades con el ángulo llano. Para ser precisos, usamos los conceptos dados en las páginas 30 y 34 de la referencia (Vera Saravia, 2016).
4. Para incluir la orientación reemplazaremos pares de semirrectas por pares ordenados de vectores unitarios y denotaremos la familia de pares de vectores unitarios opuestos

$$\Delta \equiv \{ (u, -u) ; u \in S^1 \}$$

donde $S^1 := \{u \in \mathbb{R}^2 : u^2 = 1\}$.

5. Representaremos los ángulos orientados que determinan dos vectores unitarios cuando son opuestos en el interior del paralelogramo correspondiente.

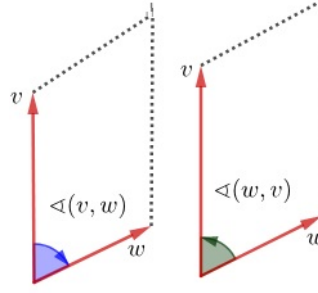


Figura 1.1: Ángulos orientados

1.2.1. Una definición de ángulo orientado

Proposición 1.2 *Dados los pares ordenados (a, b) y $(u, v) \in S^1 \times S^1$, La siguiente relación en $S^1 \times S^1$*

$$(a, b) \sim (u, v) \iff ab = uv$$

es una relación de equivalencia.

Demostración.

Reflexividad. Para todo $(a, b) \in S^1 \times S^1$

$$ab = ab \implies (a, b) \sim (a, b)$$

Simetría. Dados $(a, b), (c, d) \in S^1 \times S^1$

$$(a, b) \sim (c, d) \implies ab = cd$$

$$\implies cd = ab$$

$$\therefore (c, d) \sim (a, b)$$

Transitividad. Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in S^1 \times S^1$

$$(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f)$$

$$\implies ab = cd \wedge cd = ef \implies ab = ef$$

$$\therefore (a, b) \sim (e, f)$$

■

Definición 1.3 *En las condiciones de la proposición anterior y denotando con $\langle a, b \rangle$ la clase de equivalencia de (a, b) definimos*

1. $\angle(u, v)$ el ángulo orientado de u hacia v , como la clase de equivalencia $\langle a, b \rangle$.
2. Ángulo orientado entre dos vectores no nulos, como el ángulo orientado entre los correspondientes vectores unitarios.

Convenio 1.4 .

1. A cada par de vectores $(u, v) \in \frac{S^1 \times S^1}{\Delta}$ le corresponde una única $\mu\angle(u, v) \in]-\pi, \pi[$ llamada su **medida orientada**.
2. $\mu\angle(u, v) \in]-\pi, \pi[$ acepta las siguientes alternativas:
 - a) Si $\mu\angle(u, v) \in]0, \pi[$, entonces el ángulo $\angle(u, v)$ está positivamente orientado y si $\mu\angle(u, v) \in]-\pi, 0[$ entonces el ángulo estará negativamente orientado.
 - b) Si $\mu\angle(u, -u) = \pi$, $\forall u \in S^1$ entonces será representado con el ángulo llano positivamente orientado.
 - c) $\mu\angle(u, v) = -\mu\angle(v, u) \forall (u, v) \in \frac{S^1 \times S^1}{\Delta}$

Observación 1.5 1. De acuerdo a la definición anterior, $ab = uv$ implica $\mu\angle(a, b) = \mu\angle(u, v)$.

2. De acuerdo a lo convenido y la identidad geométrica de Euler, (Catoni, 2011), consideraremos equivalentes:

- a) $uv = \exp((\mu\angle(u, v))i) \equiv \mathfrak{e}^{(\mu\angle(u, v))i}$
- b) $u.v = \cos \mu\angle(u, v)$ y $u \uparrow v = (\sin \mu\angle(u, v))i$

Algebrizar significará expresar aspectos geométricos mediante “fórmulas invariantes” construidas usando las operaciones de AG(2). Algebrizado el cálculo de la longitud de un vector. A seguir, veremos que también se puede algebrizar el cálculo del área de un paralelogramo determinado por un par de vectores linealmente independientes.

1.2.2. Precisando los multivectores

Observación 1.6 .

1. Sea (u_1, u_2) una base ortonormal, si $v = a_1u_1 + a_2u_2$ y $w = b_1u_1 + b_2u_2$, entonces $(v \uparrow w)(w \uparrow v) = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$, que es el cuadrado del área del paralelogramo determinado por los vectores v y w . Esto algebriza el cálculo de dicha área.

2. El producto exterior de dos vectores es un bivector, pero esta relación no es biyectiva. Esto sugiere que todo bivector puede ser representado en más de una forma distinta.

Afirmación 1.7 .

1. El producto escalar de vectores es simétrico y bilineal; es decir,

$$w.v = v.w$$

$$(\alpha u + \beta v).w = \alpha(u.w) + \beta(v.w) \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$u.(\alpha v + \beta w) = \alpha(u.v) + \beta(u.w) \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. El producto exterior de vectores es anti-simétrico y bilineal; es decir,

$$w \uparrow v = -v \uparrow w$$

$$(\alpha u + \beta v) \uparrow w = \alpha(u \uparrow w) + \beta(v \uparrow w) \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$u \uparrow (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \uparrow v) + \beta(u \uparrow w) \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3. $e_1 \uparrow e_2 = e_1 e_2 = i (\Leftrightarrow e_2 \uparrow e_1 = e_2 e_1 = -i)$

Esto permite algebrizar el concepto de complejo conjugado.

4. $v.(iw) = -i(v \uparrow w) (\Leftrightarrow v \uparrow w = (v.(iw))i)$

$$v \uparrow (iw) = -i(v.w) (\Leftrightarrow v.w = i(v \uparrow (iw))).$$

5. $(v \uparrow w)^2 \leq 0$ y $((v \uparrow w)i)^2 \geq 0$.

6. Se tiene la importante versión alternativa de la identidad geométrica de Euler, (Catoní, 2011), correspondiente a los productos vw y wv .

$$vw = v.w + v \uparrow w \tag{1.2.1}$$

$$wv = w.v + w \uparrow v \tag{1.2.2}$$

Se sabe que, $(vw)(wv) = (v.w)^2 + (v \uparrow w)(w \uparrow v) = (v.w)^2 - (v \uparrow w)^2$, luego por el ítem 4 de la afirmación 1.7 se tiene:

Corolario 1.8 .

1. $v, w \in S^1 \Rightarrow (v.w)^2 + ((v \uparrow w)i)^2 = 1$ con $(v \uparrow w)i \in \mathbb{R}$.

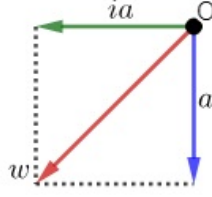


Figura 1.2: Descomposición ortogonal de un vector

2. Dados $w \in \mathbb{R}^2$ y $a \in S^1$, (usando $w = (wa)a$ se obtiene:)

$$w = (w.a)a + (w.(ia))ia = (w.a)a + (w.(ai))ai$$

Esto algebriza la descomposición de w en la base ortonormal (a, ia) (y también en la base (a, ai)) como muestra la figura 1.2.

Afirmación 1.9 Dados los vectores u, v y w se tienen las siguientes identidades fundamentales:

$$w(u \uparrow v) = (w.u)v - (w.v)u \quad (1.2.3)$$

$$(u \uparrow v)w = (w.v)u - (w.u)v \quad (1.2.4)$$

Estos vectores son uno opuesto del otro y ambos ortogonales a w , y $u \uparrow v$ es múltiplo de i .

1.2.3. Ortogonalidad y colinealidad

Afirmación 1.10 .

1. v y w son colineales $\Rightarrow v \uparrow w = 0$.

2. Ahora se puede algebrizar plenamente la ortogonalidad y la colinealidad:

$$v \text{ y } w \text{ son ortogonales } (\Leftrightarrow v.w = 0) \Leftrightarrow vw + wv = 0$$

$$v \text{ y } w \text{ son colineales } (\Leftrightarrow v \uparrow w = 0) \Leftrightarrow vw - wv = 0$$

3. Se tiene la siguiente alternativa: Dado el vector $v \neq 0$:

$$w \text{ es colineal con } v \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } w = \alpha v$$

$$w \text{ es ortogonal con } v \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } w = \alpha vi$$

Afirmación 1.11 .

1. La estructura de $AG(2)$ no depende de base ortonormal alguna.

Si $(u_1, u_2) \in S^1 \times S^1$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^2 entonces

$$AG(2) = \{b_0 + b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_1u_2 : b_j \in \mathbb{R}\}$$

2. La siguiente afirmación establece una relación entre dos épocas del álgebra geométrica:

Las condiciones de Grassmann-Clifford

$$a_1^2 = a_2^2 = 1 \quad y \quad a_1a_2 + a_2a_1 = 0$$

son equivalentes a las ecuaciones de Dirac

$$a_ia_j + a_ja_i = 2\delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Veamos cómo algebrizar el cálculo de vectores ortogonales a un vector dado,

Afirmación 1.12 Si $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, entonces

1. vi y iv son ortogonales a v y tienen longitud $\|v\|$.

2. Los vectores vi e iv resultan de rotar $\pm \frac{\pi}{2}$ al vector v .

3. En particular, podremos algebrizar el concepto de base ortonormal orientada:

$$(u, v) \in S^1 \times S^1 \text{ es base ortonormal orientada si y solo si } uv = \pm i \quad (1.2.5)$$

De modo más preciso, dado $u \in S^1$,

$$(u, ui) \text{ y } (e_1, e_2) \text{ tienen la misma orientación (antihoraria o positiva)} \quad (1.2.6)$$

$$(u, iu) \text{ y } (e_1, -e_2) \text{ tienen la misma orientación (horaria o negativa)} \quad (1.2.7)$$

Las identidades (1.2.3) y (1.2.4) generalizan la afirmación 1.12 al incluir homotecias. Para simplificar el proceso de algebrización de la geometría debemos establecer las ideas en este nuevo contexto. Así por ejemplo $i = e_1e_2$, sugiere rebautizar los números imaginarios.

Definición 1.13 Dados $u, v \in S^1$,

$$1. \text{ sen } \mu\angle(u, v) = -(v \uparrow w)i.$$

$$2. \text{ cos } \mu\angle(u, v) = u.v.$$

Del item 2 de la observación 1.5 aplicada a uv , podemos establecer la identidad 1 del corolario 1.8.

Afirmación 1.14 *Dados los pares ordenados (u, v) , $(a, b) \in S^1 \times S^1$:*

1.

$$\theta = \mu\angle(u, v) \Leftrightarrow uv = \mathfrak{e}^{\theta i}$$

2.

$$\angle(a, b) = \angle(u, v) \text{ y } \mu\angle(a, b) = \mu\angle(u, v) \Leftrightarrow ab = uv$$

3.

$$\angle(a, b) = -\angle(u, v) \text{ y } \mu\angle(a, b) = -\mu\angle(u, v) \Leftrightarrow ab = vu$$

siempre que los pares de vectores (a, b) y (u, v) sean linealmente independientes.

Corolario 1.15 .

1. *Dados los vectores no nulos u y $v \in \mathbb{R}^2$, son equivalentes:*

$$\theta = \mu\angle(u, v) \tag{1.2.8}$$

$$uv = \|u\|\|v\|\mathfrak{e}^{\theta i} \tag{1.2.9}$$

$$u.v = \|u\|\|v\|\cos \theta \text{ y } u \uparrow v = \|u\|\|v\|(\text{sen } \theta)i \tag{1.2.10}$$

Si, además, u y v no tienen sentidos opuestos:

$$-\theta = \mu\angle(v, u) \tag{1.2.11}$$

$$vu = \|v\|\|u\|\mathfrak{e}^{-\theta i} \tag{1.2.12}$$

2. *Dados $v \in \mathbb{R}^2$ y $\beta \in]-\pi, \pi[$, se cumple:*

$$v\mathfrak{e}^{\beta i} = \mathfrak{e}^{-\beta i}v$$

Observación 1.16 .

1. Debemos decir que hemos considerado $i = e_1e_2$ y no $i = e_2e_1$ por respeto a los convenios heredados.

De la equivalencia de las ecuaciones 1.2.9 y 1.2.12, se tiene:

$$i = e_1e_2 = \mathfrak{e}^{\frac{\pi}{2}i} \Leftrightarrow \mathfrak{e}^{-\frac{\pi}{2}i} = e_2e_1 = -i$$

con lo que $+i$ se asocia con $+\frac{\pi}{2}$ y $-i$ se asocia con $-\frac{\pi}{2}$.

2. Las ecuaciones 1.2.10 ofrecen alternativas familiares para:

2.1 El producto interior

$$u.v = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

2.2 El producto exterior

$$u \uparrow v = \|u\|\|v\|(\sin\theta)i$$

2.3 El área del paralelogramo determinado por los vectores u y v

$$|u \uparrow v| = \sqrt{(u \uparrow v)(u \uparrow v)} = \|u\|\|v\|\sin\theta$$

3. $|u \uparrow v|$ será llamado *módulo del bivector* $u \uparrow v$.
4. Así como para un vector se puede considerar la longitud orientada del segmento determinado por un par ordenado de puntos, el bivector $u \uparrow v = \|u\|\|v\|(\sin\theta)i$ puede considerarse el *área orientada del paralelogramo determinado por el par ordenado de vectores* (u, v) .

De todo lo anterior, dos vectores linealmente independientes u y v determinan dos paralelogramos orientados. Esto nos permite ampliar a bivectores simples la conocida representación que hizo Grassmann (Berger, 2009), de los vectores mediante segmentos orientados de recta.

Dados los vectores linealmente independientes $u, v \in \mathbb{R}^2$, el producto exterior $u \uparrow w$ será representado por el *paralelogramo orientado* determinado por dichos vectores y el ángulo orientado $\angle(u, v)$ establecido en el convenio 1.4.

Observación 1.17 . De $v \uparrow u = \frac{1}{2}v \uparrow 2u$ se puede concluir que, a diferencia de los vectores, un bivector tiene una infinidad de representaciones geométricas.

Afirmación 1.18 El álgebra de los números complejos puede ser considerada como el siguiente \mathbb{R} -subespacio vectorial de $\mathbb{R}[u_{12}]$, la familia de polinomios en la variable no real u_{12} ,

$$\mathbb{C} = \{a_0 + a_1u_{12}/a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

	1	u_{12}
1	1	u_{12}
u_{12}	u_{12}	-1

Cuadro 1.3: Producto de 1 y u_{12}

El producto de complejos coincide con el producto de polinomios, **modificado** por la tabla 1.3,

Veamos ahora la extensión polinomial que interesa de \mathbb{C} , que permitirá justificar la identidad geométrica de Euler, (Catoni, 2011). En este proceso previo de formalización matemática, consideremos \mathbb{R}^2 simplemente como un \mathbb{R} -espacio vectorial y con $\{u_1, u_2\}$ denotaremos su base canónica.

Afirmación 1.19 Si $v = v_1u_1 + v_2u_2$ entonces $v^2 = vv = v_1^2 + v_2^2$ e $u_{12}v = -vu_{12}$.

Afirmación 1.20 $zv = v\bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$ y $\forall v \in \mathbb{R}^2$

Observación 1.21 De la afirmación 1.20:

1. $u_{12}v \neq vu_{12}$ nos dice que $AG(2)$ es no conmutativa; sin embargo, los elementos de \mathbb{R} conmutan con todo elemento de $AG(2)$.
2. La estructura de $AG(2)$ determina la métrica euclidiana del \mathbb{R}^2 de tal modo que $\|v\| = \sqrt{vv}$, una expresión invariante (no usa coordenadas).
3. $\|u_{12}v\| = \|vu_{12}\| = \|v\|$.
4. Tenemos una alternativa para expresar la familia de vectores unitarios de \mathbb{R}^2 ,

$$S^1 = \{w \in \mathbb{R}^2 : w^2 = 1\}$$

Afirmación 1.22 .

1. Los productos geométricos de los vectores u_1 y u_2 satisfacen las llamadas condiciones de Grassmann-Clifford

$$u_1u_1 = u_2u_2 = 1 \quad y \quad u_2u_1 + u_1u_2 = 0.$$

2. $\{1, u_1, u_2, u_{12}\}$ es una base de $AG(2)$.

Observación 1.23 .

1. La primera condición de Grasmann-Clifford afirma que los vectores u_1 y u_2 son unitarios. Mientras que la segunda, nos dice que los vectores u_1 y u_2 son ortogonales.
2. Es importante verificar que la identidad $(u_1 u_2)(u_1 u_2) = -1$, se obtiene de las condiciones de Grasmann-Clifford, sin usar $u_1 u_2 = u_{12}$. Por este motivo será mejor considerar:

$$AG(2) = \{a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_{12} : a_j \in \mathbb{R}\}$$

3. Los elementos de S^1 son raíces cuadradas (geométricas) de 1 y, de otro lado, $\pm u_1 u_2$ son raíces cuadradas de -1.

Lo sustantivo de esta nueva estructura radica en que “atomiza” los números complejos como el producto de dos vectores. Esto nos permitirá algebrizar el concepto de ángulo orientado entre dos vectores.

Afirmación 1.24 La tabla 1.2 permitirá verificar que el producto geométrico de dos elementos de $AG(2)$ es un elemento de $AG(2)$; en efecto, si:

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1 u_2 \in AG(2) \quad y \\ B &= b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_1 u_2 \in AG(2) \quad \text{se tiene} \\ AB &= c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_1 u_2 \in AG(2) \quad \text{donde} \end{aligned}$$

$$c_0 = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1$$

explicitemos tres casos particulares:

1. El producto geométrico de dos vectores es un número complejo:

$$\text{Dados } v = v_1 u_1 + v_2 u_2, w = w_1 u_1 + w_2 u_2 \in \mathbb{R}^2$$

$$vw = (v_1 w_1 + v_2 w_2) + (v_1 w_2 - v_2 w_1) u_{12} \in \mathbb{C} \quad (1.2.13)$$

$$wv = (w_1 v_1 + w_2 v_2) - (v_1 w_2 - v_2 w_1) u_{12} \in \mathbb{C} \quad (1.2.14)$$

2. El producto geométrico de complejos es un número complejo:

Dados $a = a_1 + a_2u_{12}$, $b = b_1 + b_2u_{12} \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$ab = ba = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)u_{12} \in \mathbb{C}$$

Más aún, el producto geométrico extiende el producto de números reales y complejos de tal modo que \mathbb{R} y \mathbb{C} resultan subálgebras conmutativas de $AG(2)$.

3. El producto geométrico de vectores con complejos es un vector:

$$v \in \mathbb{R}^2 \text{ y } z \in \mathbb{C} \Rightarrow zv, vz \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2.15)$$

Observación 1.25 La afirmación 1.24 contiene dos aspectos importantes:

1. Todo complejo z es **atomizado** como el producto geométrico de una infinidad de pares de vectores (v, w) de tal modo que $vw = z$ y $wv = \bar{z}$. Esto generaliza $u_1u_2 = u_{12}$ y $u_2u_1 = -u_{12}$. Estamos en camino de explicar la relación algebraico-geométrica entre vectores, números complejos y ángulos.
2. También veremos que la ecuación 1.2.15 tiene que ver con homotecias y/o rotaciones simétricas.

Observación 1.26 .

1. Las identidades (1.2.13) y (1.2.14) son las versiones en coordenadas de la descomposición fundamental (1.2.18) de los productos vw y wv . Esto último permitiría obtener resultados invariantes.
2. Ahora se puede algebrizar la ortogonalidad de vectores:

$$v, w \in \mathbb{R}^2 \text{ son ortogonales si y solo si } vw + wv = 0 \quad (1.2.16)$$

3. También se puede verificar que la longitud de un vector no depende de base ortonormal alguna; en efecto,
Si $u_1, u_2 \in S^1$ es una base ortonormal, y $v = a_1u_1 + a_2u_2$, entonces

$$v^2 = vv = a_1^2 + a_2^2$$

4. Ahora se verá, que el producto geométrico, se descompone en sus partes simétrica y antisimétrica

$$vw = \frac{1}{2}(vw + wv) + \frac{1}{2}(vw - wv) \quad (1.2.17)$$

Se observa que sumando y restando las identidades (1.2.13) y (1.2.14) se tiene:

- a) Las partes reales de los productos geométricos vw y wv son iguales a la parte simétrica de vw

$$(v_1w_1 + v_2w_2) = \frac{1}{2}(vw + wv)$$

y este valor coincide con el producto escalar $v \cdot w = w \cdot v$

- b) Las partes imaginarias de vw y wv son iguales, respectivamente, a \pm la parte antisimétrica de vw ; es decir,

$$(v_1w_2 - v_2w_1)i = \frac{1}{2}(vw - wv) \text{ y } (w_1v_2 - w_2v_1)i = \frac{1}{2}(wv - vw)$$

y su módulo, $|v_1w_2 - v_2w_1|$, es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores u y v , cuando son linealmente independientes (es cero si y solo si son linealmente dependientes).

Observación 1.27 .

1. El producto geométrico de dos vectores resulta un número complejo. En particular, si u y v son dos vectores unitarios no opuestos y $\theta \in]-\pi, \pi]$ es la medida del ángulo orientado de u a v , entonces el nuevo producto permite ampliar una identidad bien conocida como la identidad geométrica de Euler, (Catoni, 2011),

$$uv = e^{\theta i} = \cos \theta + (\sin \theta)i \quad (1.2.18)$$

2. El producto geométrico de un vector con un número complejo resulta otro vector. Esto permitirá algebrizar las rotaciones y homotecias; en particular, si $w \in \mathbb{R}^2$ y $z = re^{\alpha i}$, con $0 < r < 1$ y $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se tendrá una situación similar a la figura 1.3.

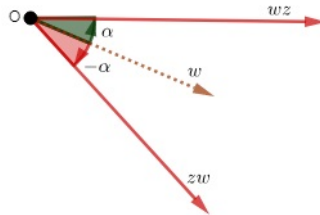


Figura 1.3: Producto geométrico de w y z

3. \mathbb{R} y \mathbb{C} son subálgebras conmutativas de $AG(2)$, aún cuando el producto geométrico no es conmutativo.

1.3. Algebrizando la geometría 2

1.3.1. Reflexiones

Nos limitamos a algebrizar las reflexiones de vectores con respecto a rectas que pasan por el origen (no trataremos el caso afín).

Definición 1.28 Dada la recta l generada por $u \in S^1$, la aplicación

$$\rho_u : w \in \mathbb{R}^2 \rightarrow -uwu \in \mathbb{R}^2$$

será llamada *reflexión respecto de la recta l* .

La naturalidad de esta definición se aprecia en el diagrama que sigue (basta calcular uwu , usando la descomposición ortogonal $w = (w \cdot u)u + (w \cdot ui)ui$)

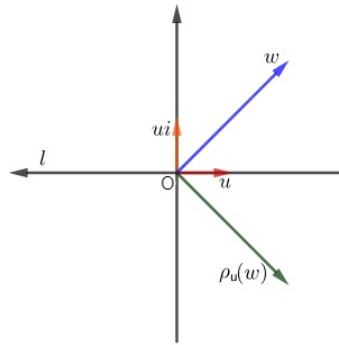


Figura 1.4: Reflexión de w sobre una recta l .

Afirmación 1.29 .

1. $\rho_u^{-1} = \rho_u$.
2. $(\rho_u(v))^2 = v^2$, es decir, toda reflexión es una **isometría**.

Demostración. Usar la definición 1.28. ■

1.3.2. Rotaciones

En concordancia con el enfoque dado a las reflexiones, nos limitaremos a algebrizar rotaciones de vectores con centro en el origen.

Observación 1.30 Dadas las reflexiones ρ_u y ρ_v con $u, v \in S^1$, linealmente independientes, si $\theta = \mu\angle(u, v) \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ entonces:

$$\rho_v \rho_u[w] = vuwuv = \mathfrak{e}^{-\theta i} w \mathfrak{e}^{\theta i} \quad \forall w \in \mathbb{R}^2.$$

Recordando el teorema clásico de la geometría euclidiana que caracteriza las rotaciones en términos de reflexiones, (Barker and Howe, 2007).

Definición 1.31 Dado $\theta \in]-\pi, \pi[$, la aplicación,

$$\rho_{2\theta} : w \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{e}^{-\theta i} w \mathfrak{e}^{\theta i} \in \mathbb{R}^2.$$

será llamada *rotación orientada* (en el ángulo orientado 2θ)

La coincidencia con la idea tradicional sigue de la observación 1.30. En efecto:

$$\begin{aligned} \rho_{2\theta}[w] &= \mathfrak{e}^{-\theta i} w \mathfrak{e}^{\theta i} \\ &= w \mathfrak{e}^{\theta i} \mathfrak{e}^{\theta i} \\ &= w \mathfrak{e}^{2\theta i} \end{aligned}$$

Multiplicando por w se tiene:

$$w \rho_{2\theta}[w] = \|w\|^2 \mathfrak{e}^{2\theta i}.$$

Usando la equivalencia de las ecuaciones en 1.2.8 y 1.2.9; resulta:

$$\mu\angle(w, \rho_{2\theta}(w)) = 2\theta.$$

Afirmación 1.32 .

1. Las rotaciones orientadas $\rho_{2\theta}$ y $\rho_{-2\theta}$ son una inversa de la otra.
2. $(\rho_{2\theta}(w))^2 = w^2$, es decir, toda rotación orientada es una **isometría**.

Para concluir esta parte daremos, en el contexto de AG(2), el teorema clásico que caracteriza a las rotaciones de la geometría euclidiana en términos de reflexiones.

Proposición 1.33 Dadas las reflexiones ρ_u y ρ_v con $u, v \in S^1$, linealmente independientes, si $\theta = \mu\angle(u, v) \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ entonces:

$$\rho_v \rho_u[w] = \rho_{2\theta} \tag{1.3.1}$$

Recíprocamente, toda rotación orientada se decompone del modo indicado en la identidad 1.3.1, sin unicidad de los vectores unitarios considerados.

1.3.3. Inversiones

Definición 1.34 *La aplicación*

$$\gamma_r : v \in \mathbb{R}^2 \rightarrow r^2 v^{-1} \in \mathbb{R}^2 \quad : \|v\| = r \in \mathbb{R}^+$$

será llamada inversión de radio r y centro c .

Observación 1.35 *Esta operación es una generalización de la inversa de un vector en el álgebra geométrica, (caso $r = 1$)*

Afirmación 1.36 *Si $u \in \mathbb{R}^2$ con:*

1. $\|u\| < r$, entonces $\|\gamma_r(u)\| > r$.
2. $\|u\| = r$, entonces $\|\gamma_r(u)\| = r$.
3. $\|u\| > r$, entonces $\|\gamma_r(u)\| < r$.

Demostración. Usar la definición 1.34. ■

Afirmación 1.37 *Si $z \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\gamma_r : z \in \mathbb{C} \rightarrow \frac{r^4 z}{|z|^2} \in \mathbb{C}$$

(Las inversiones transforman números complejos en números complejos proporcionales con el mismo argumento)

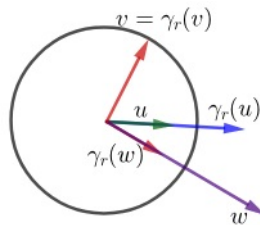


Figura 1.5: Inversión de un vector

1.3.4. Dilataciones

Definición 1.38 *La aplicación*

$$d : v \in \mathbb{R}^2 \rightarrow kv \in \mathbb{R}^2 ; k \in \mathbb{R}$$

será llamada dilatación.

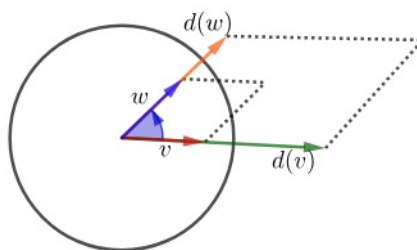


Figura 1.6: Dilatación de un vector

1.3.5. Traslaciones

Definición 1.39 *Una traslación del vector v , es la operación geométrica que mueve un vector u en la dirección y longitud del vector v para dar el vector $\tau_v(u)$,*

$$\tau_v : u \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \tau_v(u) = (u, u + v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

1.4. \mathbb{R} -espacios afines bidimensionales

Usaremos como estructura inicial el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^2 .

1.5. Notación y terminología

- $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el conjunto de pares ordenados de números reales.
- \mathbb{R}^2 el \mathbb{R} -espacio vectorial de pares ordenados de números reales.
- $\mathcal{B}(2)$, el grupo de biyecciones de \mathbb{R}^2 sobre sí mismo.
- $\tau_v \in \mathcal{B}(2)$, donde $v \in \mathbb{R}^2$, la v -traslación definida por $\tau_v(w) = w + v \quad \forall w \in \mathbb{R}^2$.

- $GL(2)$ el grupo lineal de \mathbb{R}^2 .
- $\mathcal{B}(\mathbb{E}, 2)$ es el grupo de biyecciones de \mathbb{E}^2 sobre \mathbb{R}^2 , llamadas cartas (globales) de \mathbb{E}^2 sobre \mathbb{R}^2 .
- $\Phi \in \mathcal{B}(\mathbb{E}, 2)$ es llamada una O -carta de $P \in \mathbb{E}^2$ si $\Phi(P) = (0, 0)$.

Observación 1.5.1 *En las condiciones anteriores,*

- $GL(2) \leq \mathcal{B}(2)$, donde $U \leq V$ indica que el grupo U es un subgrupo del grupo V .
- Existen O -cartas para cada $P \in \mathbb{E}^2$; en efecto, dada $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{E}, 2)$, basta considerar la composición $\tau_v \varphi$ donde $v = -\varphi(P)$.

1.5.1. Visión alternativa de \mathbb{R} -espacio vectorial

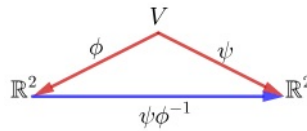
Proposición 1.40 *Un conjunto $V \neq \emptyset$ admite una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial bi-dimensional, con $v_0 \in V$ como elemento nulo, si y solamente si existen **dos familias** no vacías de funciones:*

1. $\mathcal{A}(V) \subset \mathcal{B}(V, 2)$, formada con O -cartas de v_0 .
2. $GL(2)$

tal que se cumple:

$$\Phi, \Psi \in \mathcal{A}(V) \text{ entonces } \Psi\Phi^{-1} \in GL(2) \quad (1.5.1)$$

La condición 1.5.1 se expresa mediante el siguiente diagrama conmutativo:



Demostración.

1. La condición necesaria es inmediata.

2. Para la condición suficiente verificar que:

$\Phi^{-1}(O)$, $\Phi^{-1}(\Phi(v) + \Phi(w))$ y $\Phi^{-1}(\lambda\Phi(v))$ no dependen de $\Phi \in \mathcal{A}(V)$.

■

Observación 1.5.2 *Verificar que:*

1. $\Phi^{-1}(O) = v_0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{A}(V)$.

2. $\mathcal{A}(V) \leq GL(V)$

$GL(V)$ denota el grupo de \mathbb{R} -isomorfismos lineales de V .

Para incluir aspectos geométricos debemos afinar las condiciones de la proposición 1.40

1.5.2. Versión kleiniana de \mathbb{R} -espacio vectorial

Definición 1.41 *Un conjunto $V \neq \emptyset$ admite una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial kleiniano bidimensional, con $v_0 \in V$ como elemento nulo, si existen dos familias no vacías de funciones:*

1. $\mathcal{A}(V) \subset \mathcal{B}(V, 2)$, formada por O -cartas de v_0 , llamada atlas de V .

2. $\mathcal{G}(V) \leq GL(2)$ llamada grupo estructural de V .

de tal modo que:

$$\Phi, \Psi \in \mathcal{A}(V) \text{ entonces } \Psi\Phi^{-1} \in \mathcal{G}(V) \quad (1.5.2)$$

También diremos que V es un \mathbb{R} -espacio vectorial bidimensional, con grupo estructural $\mathcal{G}(V)$.

La condición 1.5.2, se expresa mediante un diagrama conmutativo similar al diagrama asociado a la proposición 1.40 (en el presente caso $\Psi\Phi^{-1} \in \mathcal{G}(V)$).

Observación 1.5.3 *Podemos concluir:*

- El atlas $\mathcal{A}(V)$ permite transferir la estructura de \mathbb{R}^2 a V , de tal modo que los elementos de $\mathcal{A}(V)$ resultan \mathbb{R} -isomorfismos lineales.

- El grupo estructural $\mathcal{G}(V)$ determina el tipo de estructura. Así por ejemplo, si en el ítem 2 de la definición anterior consideramos como grupo estructural

$$\mathcal{G}(V) = \mathcal{O}(2), \text{ el grupo ortogonal de } \mathbb{R}^2,$$

entonces V resulta un espacio vectorial con producto interno.
(verificar que $\Phi^{-1}(\Phi(v) \cdot \Phi(w))$ no depende de Φ).

- Consideraremos $\mathcal{A}(V)$ maximal en el siguiente sentido:
Si $\alpha \in \mathcal{A}(V)$ y $\xi \in GL(2)$ entonces $\xi\alpha \in \mathcal{A}(V)$
(obviamente ξ es el correspondiente cambio de coordenadas).
- Pondremos $\mathcal{A}(2) = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2) \leq GL(2)$
- Con lo hecho, hemos ampliado nuestra categoría inicial, ahora tenemos: Como objetos, los \mathbb{R} -espacios vectoriales kleinianos bidimensionales y como morfismos, las aplicaciones lineales entre dichos espacios.

1.5.3. El espacio afín \mathbb{E}^2

Veamos que $\mathcal{A} \equiv \mathbb{E}^2$ admite una estructura de \mathbb{R} -espacio afín kleiniano bidimensional; es decir,

1. Existen dos familias de funciones:

$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{U}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}, 2)$, formada por O -cartas de cada $X \in \mathcal{A}$, y

$\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(\mathcal{A}) \leq GL(2)$

tales que, para cada $X \in \mathcal{A}$,

$$\Phi_X, \Psi_X \in \mathfrak{U} \text{ son } O\text{-cartas de } X \Rightarrow \Psi_X \Phi_X^{-1} \in \mathcal{G}$$

Condición que se representa mediante el siguiente diagrama conmutativo

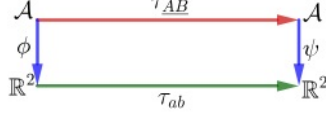
$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} & \\ \phi_X \swarrow & & \searrow \psi_X \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ & \psi_X \phi_X^{-1} & \end{array}$$

2. Una acción del grupo aditivo $(\mathbb{R}^2, +)$ en \mathbb{E}^2 (Un homeomorfismo entre los grupos \mathbb{R}^2 y $\mathcal{B}(\mathbb{E}^2)$)

$$\tau : v \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \tau_v \in \mathcal{B}(\mathbb{E}^2)$$

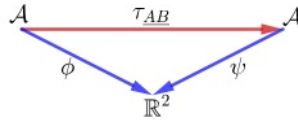
de modo que se cumple:

- Dados $A, B \in \mathbb{E}^2$ existe un único $\underline{AB} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\tau_{\underline{AB}}(A) = B$.
- Para cada $\phi, \psi \in \mathfrak{U}(\mathcal{A})$ el siguiente diagrama conmuta:



donde $a = \phi(A)$, $b = \psi(B)$ y $\tau_{ab}(x) = x + (b - a)$

3. Dados $A, B \in \mathbb{E}^2$, si $\Phi \in \mathfrak{U}$ es O -carta de A entonces existe una única O -carta de B , $\Psi \in \mathfrak{U}$, tal que el siguiente diagrama conmuta



Observación 1.5.4 .

1. Para cada $P \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} admite una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial kleiniano bidimensional, con P como elemento nulo y grupo estructural \mathcal{G} , que desde ya, se denota $T_P\mathcal{A}$. Con PX se denotan sus elementos (los vectores con origen P y extremo $X \in \mathcal{A}$).
2. Se puede ahora demostrar que todo \mathbb{R} -espacio vectorial kleiniano admite una estructura natural de \mathbb{R} -espacio afín kleiniano.
3. Tener presente que se ha ampliado la tradicional identificación. Punto $Q \in \mathbb{R}^2$ con flecha originada en $O \equiv (0,0)$ y extremo Q .

Adoptando el siguiente convenio:

\mathcal{P} puede ser visto como una pizarra, una hoja de papel o un telón, ya que esta representa el plano euclidiano \mathbb{E}^2 .

Asumiremos:

- Cada elemento $P \in \mathcal{A}$ es representado por un único punto $P \in \mathcal{P}$ (usamos la misma letra P en ambos casos).
- Cada vector libre $(P, Q) \in T_P\mathcal{A}$ es representado por una única flecha $PQ \subset \mathcal{P}$, origen P y extremo Q , (usamos PQ en ambos casos).

1.5.4. El espacio euclidiano bidimensional \mathbb{E}^2

El plano euclidiano bidimensional, denotado \mathbb{E}^2 es un ambiente que puede ser visto como la superficie de una pizarra o de una pantalla, que a priori denotado por \mathcal{P} se usarán,

- Puntos $\in \mathcal{P}$ (denotados por A, B, C), para representar los elementos de \mathbb{E}^2 .
- Flechas $\subset \mathcal{P}$ (denotadas por AB, BC, AC) para representar los vectores libres de \mathbb{E}^2 .

Matematizaremos \mathbb{E}^2 , considerando el conjunto de pares ordenados de números reales $\mathfrak{R} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de tal modo que todo punto sirve de origen de una estructura de espacio vectorial y dichos espacios vectoriales resultan convenientemente conectados entre sí y son isomorfos a \mathbb{R}^2 (el conjunto \mathfrak{R} provisto de la estructura usual de espacio vectorial). Esto es parte de lo que se necesita para algebrizar las demostraciones geométricas en el espacio euclidiano.

El enfoque geométrico de los espacios afines trata de un tipo de variedad \mathfrak{A} que tiene la propiedad de que tanto ella como su fibrado tangente $T\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$ son representados en un mismo ambiente: Los elementos de \mathfrak{A} son representados por puntos y los elementos de $T\mathfrak{A}$ por flechas (también llamados vectores libres).

En este contexto el espacio euclideano bidimensional \mathbb{E}^2 es matematizado como el conjunto de pares ordenados de números reales $\mathfrak{R}_2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ provisto de la siguiente estructura:

1. Con \mathbb{R}^2 denotaremos el conjunto \mathfrak{R}_2 provisto de la estructura usual de \mathbb{R} –espacio vectorial.
2. Todo punto sirve de origen de una estructura de \mathbb{R} espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^2 .
3. Representaremos \mathbb{E}^2 del modo tradicional usando una pizarra, una hoja de papel o una pantalla que denotaremos \mathcal{P} , de tal modo que:
 - Cada elemento $P \in \mathbb{E}^2$ es representado por un único punto $P \in \mathcal{P}$. Usaremos la misma letra P en ambos casos.
 - Los elementos $(P, Q) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ son representados por flechas $PQ \subset \mathcal{P}$, con origen el punto asociado a P y extremo el punto asociado a Q . También usaremos PQ para referirnos al par ordenado (P, Q) y en ambos casos será llamado vector tangente de \mathbb{E}^2 en $P \in \mathbb{E}^2$,

$$T_P \mathbb{E}^2 = P \times \mathbb{E}^2$$

indicará la familia de los vectores tangentes de \mathbb{E}^2 en $P \in \mathbb{E}^2$, representados por flechas con origen en P .

4. Se establece una conexión entre los diferentes espacios tangentes mediante la llamada **traslación paralela** que determina:
 - Cada vector tangente $XY \in T_X \mathbb{E}^2$ es biunívocamente asociado a un vector tangente $\underline{XY} := OY - OX \in T_O \mathbb{E}^2$ donde $O = (0, 0)$,

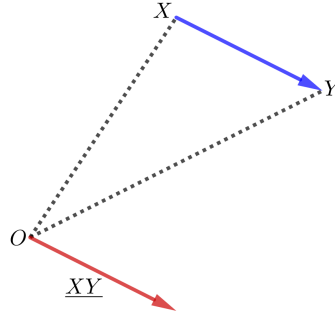


Figura 1.7: Traslación paralela

Resulta un isomorfismo como \mathbb{R} -espacios vectoriales, $T_X \mathbb{E}^2 \equiv T_O \mathbb{E}^2 \equiv \mathbb{R}^2$, que permite:

1. Hablar de vectores libres paralelos,

$PX \in T_P \mathbb{E}^2$ y $QY \in T_Q \mathbb{E}^2$ son igualmente paralelos si y solo si $\underline{PX} = \underline{QY}$

2. Sumar vectores libres cualesquiera y obtener un vector en $T_R \mathbb{E}^2$, con $R \in \mathbb{E}^2$ prefijado, mediante la suma de vectores en \mathbb{R}^2 :

$$PX + QY = RZ \text{ si y solamente si } \underline{PX} + \underline{QY} = \underline{RZ}$$

Con esto podemos matematizar la suma de vectores libres

$$AB + BC = AC \tag{1.5.3}$$

que tradicionalmente se “presenta y demuestra” recurriendo al “criterio del paralelogramo”, ver figura 1.8. Por consiguiente,

$$AB + BC = AC \text{ si y solamente si } \underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC}$$

la última suma está en \mathbb{R}^2 y se representa con el paralelogramo, ver figura 1.9. A seguir usaremos el **álgebra geométrica afín** para dar nuevas demostraciones algebraicas de algunos aspectos geométricos. Para esto hay que tener en cuenta lo siguiente:

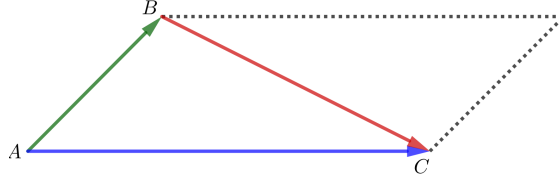


Figura 1.8: Criterio del paralelogramo

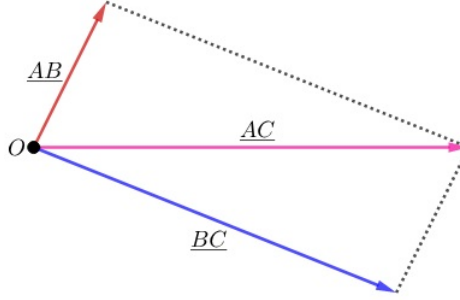


Figura 1.9: Suma de vectores trasladados

Primero. En el Álgebra Geométrica Bidimensional, $AG(2)$, se cumple la **identidad geométrica de Euler**. El producto geométrico de dos vectores no nulos, u y $v \in \mathbb{R}^2$ es el número complejo

$$uv = \|u\|\|v\|\mathbf{e}^{\theta i} = \|u\|\|v\| \cos \theta + \|u\|\|v\|(\sin \theta)i, \quad (1.5.4)$$

cuyo módulo es $|uv|$ y argumento $\theta = \mu \angle(u, v) \in]-\pi, \pi]$ es la medida del ángulo orientado de u a v (conviene considerar $\theta = \pi$ si y solo si u y v son opuestos). Recíprocamente, todo número complejo es el producto geométrico de dos vectores, pero sin unicidad de los mismos.

Nótese que, como $-\theta \in]-\pi, \pi]$, es la medida del ángulo orientado de v a u , resulta que vu es el complejo conjugado de uv dado en (1.5.4), precisamente

$$vu = \|u\|\|v\|\mathbf{e}^{-\theta i} = \|u\|\|v\| \cos \theta - \|u\|\|v\|(\sin \theta)i. \quad (1.5.5)$$

Segundo. Los productos geométricos wz y zw de un vector w con un complejo z son vectores simétricos respecto de w que resultan de rotar el vector $|z|w$ (una homotecia de w) el ángulo orientado $\pm \arg(z)$ respectivamente, como sugiere el siguiente diagrama (con $|z| > 1$ y $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$), ver figura 1.10.

Tercero. La estructura del álgebra geométrica permite determinar la conocida métrica euclídeana en \mathbb{R}^2 , (Vera Saravia, 2016), que inicialmente hemos considerado como un

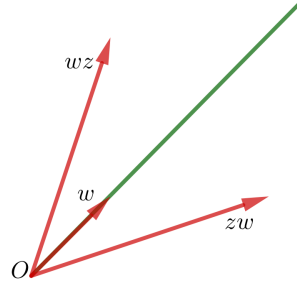


Figura 1.10: Producto geométrico de los vectores w y z

espacio vectorial. De la identidad geométrica de Euler (1.5.4) se tiene,

$$\|v\| = \sqrt{vv}. \quad (1.5.6)$$

Cuarto. La identidad geométrica de Euler (1.5.4) y la ecuación (1.5.5) algebrizan de modo invariante (sin usar coordenadas) los conceptos geométricos de ortogonalidad y colinealidad de vectores. Dados los vectores no nulos u y v tenemos,

- $uv + vu = \|u\|\|v\| \cos \theta$, reestablece el producto interior $u \cdot v$ lo que permite algebrizar de modo invariante la ortogonalidad de dichos vectores, es decir, el producto geométrico es anticonmutativo,

$$u \perp v \iff uv + vu = 0 \quad (1.5.7)$$

- $|uv - vu| = \|u\|\|v\| \sin \theta$, reestablece el valor del área del paralelogramo que determinan los vectores u y v lo que permite algebrizar de modo invariante la colinealidad de tales vectores, por ende el producto geométrico conmuta.

$$u \parallel v \iff uv - vu = 0 \quad (1.5.8)$$

Quinto. Las condiciones de Dirac (1.1.4), corresponden a la versión algebraica del concepto de base ortonormal, para esto, basta ver que la forma explícita de las condiciones de Dirac son las conocidas condiciones de Grassmann-Clifford,

$$u_1 u_1 = u_2 u_2 = 1 \text{ y } u_2 u_1 = -u_1 u_2, \quad (1.5.9)$$

y podemos concluir que las identidades (1.5.7) y (1.5.9), determinan una base ortonormal si y solo si cumplen las condiciones de Dirac.

Sexto. Como $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, dado un vector unitario $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ podemos construir bases ortonormales positivamente orientadas (u, ui) . Esto es un caso particular del gráfico mostrado en 1.11. Además los vectores ui y iu son ortogonales a u , tienen la misma longitud

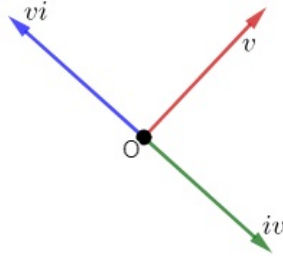


Figura 1.11: Bases ortonormales orientadas

que u y uno es inverso del otro.

Sexto. Podemos algebrizar el proceso geométrico de calcular el **vector reflexión**, $\rho_u(w) \in \mathbb{R}^2$ de un vector $w \in \mathbb{R}^2$, respecto a una recta l que pasa por el origen y es ortogonal al vector unitario $u \in S^1$, mediante la siguiente aplicación, construida utilizando el producto geométrico de $\text{AG}(2)$,

$$\rho_u : v \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \rho_u(v) = -uvu \in \mathbb{R}^2.$$

La figura 1.12 nos permite ver que,

$$w = (w.u)u + (w.(ui))ui \longrightarrow r_u(w) = -(w.u)u + (w.(ui))ui.$$

De otro lado, calculando en el contexto de $\text{AG}(2)$ y usando $-iu = ui$, $uu = 1$, tenemos,

$$\rho_u(v) = -uvw = -u((w.u)u + (w.(ui))ui)u = -(w.u)u + (w.(ui))ui,$$

notar que $w.u$ y $w.(ui)$ son escalares y conmutan con todo número geométrico.

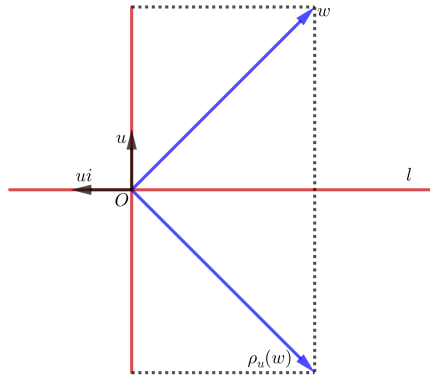


Figura 1.12: Reflexión de un vector

1.6. Operaciones con vectores libres

Para realizar operaciones con los vectores libres se procede de la siguiente manera:
 Dados los vectores libres $PX \in T_P\mathbb{E}^2$ y $QY \in T_Q\mathbb{E}^2$.

1. Para cada $R \in \mathbb{E}^2$ se establece la suma de vectores libres, con valores en $T_R\mathbb{E}^2$, mediante

$$PX + QY = RZ \text{ si y solamente si } \underline{PX} + \underline{QY} = \underline{RZ}$$

Sabiendo que $\underline{PX} = OX - OP$, $\underline{QY} = OY - OQ$ y $\underline{RZ} = OZ - OR$.

2. Definimos el producto geométrico de vectores libres como una generalización de la ecuación geométrica de Euler.

$$(PX)(QY) := (\underline{PX})(\underline{QY})$$

3. De la forma afín de la ecuación geométrica de Euler

$$(PX)(QY) = \|PX\| \|QY\| e^{\mu \lrcorner (PX, QY)i} \in \mathbb{C}$$

donde $i = e_1 e_2$ con $e_1, e_2 \in S^1$.

4. Del ítem 3 se puede definir el producto interior y exterior:

$$PX.QY := \|\underline{PX}\| \cdot \|\underline{QY}\| \cos \theta \in \mathbb{R}$$

y

$$PX \uparrow QY := \|\underline{PX}\| \cdot \|\underline{QY}\| (\sin \theta) i \in \mathbb{R}i$$

.

5. La inversa de un vector afín se calculará de la manera siguiente:

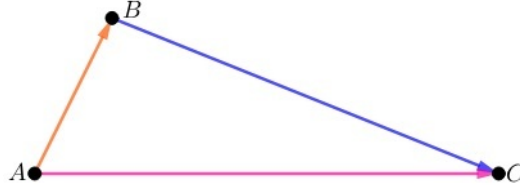
$$(PX)^{-1} := \frac{PX}{\|\underline{PX}\|^2}$$

para todo $X \neq P$

Ejemplo

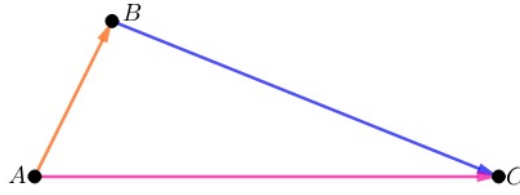
Proposición 1.42 Usando el $AG(2)$ obtener el teorema de Pitágoras y la ley de cosenos.

Demostración. Dado cualquier triángulo ABC, con vértices en \mathbb{E}^2 .



Trasladamos los vectores \underline{AB} , \underline{BC} y \underline{AC} . De esta manera se obtiene la siguiente figura que "demuestra" lo deseado:

$$\underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC} \quad (1.6.1)$$



Luego de elevar al cuadrado y usar el producto geométrico en la ecuación 1.6.1 se obtiene:

$$(\underline{AB} + \underline{BC})(\underline{AB} + \underline{BC}) = \|\underline{AB}\|^2 + (\underline{AB} \underline{BC} + \underline{BC} \underline{AB}) + \|\underline{BC}\|^2 \quad (1.6.2)$$

Usando el producto geométrico en el lado derecho de la ecuación anterior, resulta:

$$\|\underline{AB}\|^2 + (\underline{AB} \cdot \underline{BC} + \underline{AB} \uparrow \underline{BC} + \underline{BC} \cdot \underline{AB} + \underline{BC} \uparrow \underline{AB}) + \|\underline{BC}\|^2. \quad (1.6.3)$$

Teniendo en cuenta que el producto interior es conmutativo y el producto exterior es anticonmutativo, se consigue:

$$(\underline{AB} + \underline{BC})^2 = \|\underline{AB}\|^2 + 2\underline{AB} \cdot \underline{BC} + \|\underline{BC}\|^2 \quad (1.6.4)$$

Expresando el producto interno en función del ángulo, de la ecuación 1.6.4:

$$\underline{AB}^2 + 2 \|\underline{AB}\| \|\underline{BC}\| \cos \mu \angle(\underline{BC}, \underline{AB}) + \underline{BC}^2 = \underline{AC}^2 \quad (1.6.5)$$

La ecuación 1.6.5 también es conocida como la **ley de cosenos**, (Moise, 1990) y asumiendo que:

$$\mu \angle(\underline{BC}, \underline{AB}) = \frac{\pi}{2},$$

se obtiene el **teorema de Pitágoras**, (Berger, 2009):

$$\underline{AB}^2 + \underline{BC}^2 = \underline{AC}^2.$$

■

Capítulo 2

Sobre triángulos

En este capítulo, se estudian las propiedades de los triángulos, tales como el área de un triángulo, los puntos notables y el Teorema de Fermat, ver (Hestenes, 2012), (Berger, 2009), (Moise, 1990), (Barker and Howe, 2007) y (Calvet, 2007), en el contexto del álgebra geométrica bidimensional.

2.1. Área orientada de un triángulo

Desde que el área orientada de un paralelogramo es obtenido como el producto exterior de dos lados consecutivos (tomado como vectores, por supuesto), el área de un triángulo es la mitad del producto exterior de dos de sus tres lados.

Definición 2.1 *Dado un triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) se define su **área orientada** como,*

$$A_{PQR} := \frac{1}{2}PQ \uparrow PR = \frac{1}{2}QR \uparrow QP = \frac{1}{2}RP \uparrow RQ \quad (2.1.1)$$

siendo PQ, PR, QR y $QP \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Observación 2.2 1. Si los vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ están orientados en sentido antihorario, el área es un número imaginario positivo. De otra manera, el área es un número imaginario negativo.

2. Un concepto fundamental en geometría es el área orientada.

El módulo del área puede ser útil en la vida actual, pero es insuficiente para la geometría euclidiana. A partir de ahora solo se considerará las áreas orientadas. Tomaremos como ejemplo el siguiente teorema de la geometría euclidiana.

Teorema 2.3 *El área de toda región triangular es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.*

Demostración. Para una demostración ver (Moise, 1990). ■

Ahora este enunciado puede ser escrito en el contexto del álgebra geométrica bidimensional de la siguiente manera:

Proposición 2.4 *(Área de un triángulo en $AG(2)$.) El área orientada en sentido antihorario de un triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ en términos de $X \in \mathbb{E}^2 - \{P, Q, R\}$ es:*

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}(XP \uparrow XQ + XQ \uparrow XR + XR \uparrow XP) \quad (2.1.2)$$

Demostración. Usando la primera igualdad de la definición anterior:

$$\begin{aligned} A_{PQR} &= \frac{1}{2}PQ \uparrow PR \\ A_{PQR} &= \frac{1}{2}[(XQ - XP) \uparrow (XR - XP)] \end{aligned}$$

Usando las propiedades del producto exterior (Vera Saravia, 2016), resulta:

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}(XP \uparrow XQ + XQ \uparrow XR + XR \uparrow XP).$$

■

Observación 2.5 *La ecuación (2.1.2) es una expresión simétrica bajo permutación cíclica de vértices, esto significa que se puede fijar cualquier vértice y tomar el resto de puntos en el sentido deseado, sin embargo el resultado permanecerá invariante.*

Proposición 2.6 *Sean un triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) y un punto $O \in \mathbb{E}^2$, como se ve en la figura 2.1. Si $OP \uparrow OQ = 2A_{OPQ}$, $OQ \uparrow OR = 2A_{OQR}$ y $OR \uparrow OP = 2A_{ORP}$, entonces*

$$A_{PQR} = A_{OPQ} + A_{OQR} + A_{ORP}$$

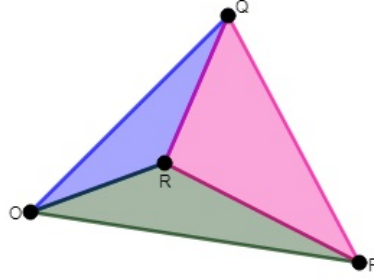


Figura 2.1: Propiedades de los triángulos

Demostración. De la proposición anterior:

$$\begin{aligned}
 A_{PQR} &= \frac{1}{2}(OP \uparrow OQ + OQ \uparrow OR + OR \uparrow OP) \\
 &\Leftrightarrow A_{PQR} = \frac{1}{2}(2A_{OPQ} + 2A_{OQR} + 2A_{ORP}) \\
 &\therefore A_{PQR} = A_{OPQ} + A_{OQR} + A_{ORP}
 \end{aligned}$$

■

Observación 2.7 De la proposición anterior podemos concluir lo siguiente,

1. El área orientada en sentido antihorario del triángulo con vértices O, P y $Q \in \mathbb{E}^2$ es positiva, y las áreas orientadas en sentido horario de los triángulos con vértices O, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ y O, R y $P \in \mathbb{E}^2$ son negativas, esto es, las áreas orientadas en sentido antihorario de los triángulos con vértices $O, R, Q \in \mathbb{E}^2$ y $O, P, R \in \mathbb{E}^2$ son positivas. Por tanto:

$$A_{PQR} = A_{OPQ} - A_{ORQ} - A_{OPR}$$

2. Cuando se consideran áreas orientadas, las igualdades son completamente generales e independientes de la disposición de puntos.

2.1.1. Medianas y centroide

Uno de los resultados que estudiaremos en esta sección es el teorema de Apolonio, también llamado teorema de la mediana, es un teorema que relaciona la longitud de la mediana de un triángulo orientado con las longitudes de sus lados.

Definición 2.8 (*Punto Medio*) Sea $X \in \mathbb{E}^2$ un punto fijo cualquiera. Dado un segmento de recta de extremos A y $B \in \mathbb{E}^2$. Decimos que un punto $M \in \mathbb{E}^2$ sobre el segmento es **punto medio**,

$$XM = \frac{XA + XB}{2} \rightarrow \|MA\| = \|MB\|$$

Denotamos $M := \frac{A + B}{2}$

Definición 2.9 Las medianas son segmentos de recta que van desde cada vértice del triángulo orientado al punto medio del lado opuesto del triángulo.

Teorema 2.10 Dado cualquier triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario). Las tres medianas se encuentran en un único punto $G \in \mathbb{E}^2$, llamado *centroide*.

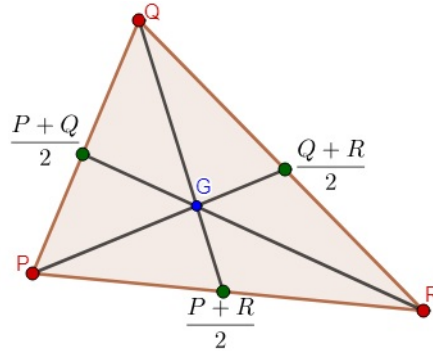


Figura 2.2: Medianas y centroide

Demostración.

Sea $X \in \mathbb{E}^2$ un punto fijo cualquiera. Dado que $G \in \mathbb{E}^2$ es un punto sobre la mediana que pasa a través de P y $M_1 := \frac{Q+R}{2} \in \mathbb{E}^2$

$$XG = kXP + (1 - k)X\frac{Q + R}{2}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.1.3)$$

El punto G también se encuentra sobre la mediana que pasa por Q y $M_2 := \frac{P+R}{2} \in \mathbb{E}^2$

$$XG = mXQ + (1 - m)X\frac{P + R}{2}, \quad m \in \mathbb{R}. \quad (2.1.4)$$

Igualando las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.4):

$$kXP + (1 - k)X\frac{Q + R}{2} = mXQ + (1 - m)X\frac{P + R}{2}$$

$$\Rightarrow (k - \frac{1}{2} + \frac{m}{2})XP + (\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - m)XQ + (-\frac{k}{2} + \frac{m}{2})XR = 0 \quad (2.1.5)$$

La ecuación (2.1.5) es una combinación lineal de los vectores linealmente independientes XP , XQ y $XR \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ que se anula únicamente si todos los coeficientes son cero. Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} k - \frac{1}{2} + \frac{m}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{k}{2} - m = 0 \\ -\frac{k}{2} + \frac{m}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1/3 \quad y \quad m = 1/3 \quad (2.1.6)$$

Esto indica que la intersección de ambas medianas se encuentra a una distancia de $\frac{1}{3}$ de los puntos medios.

La sustitución de (2.1.6) en (2.1.3) da:

$$\begin{aligned} XG &= \frac{1}{3}XQ + \frac{2}{3}(X\frac{P+R}{2}) \\ \therefore XG &= \frac{XP + XQ + XR}{3} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

■

Esta expresión para el baricentro es simétrica bajo permutación de los vértices. Por tanto las tres medianas se encuentran en un mismo punto G , llamado **centroide**. Ahora enunciaremos el teorema de Booth en su versión euclidiana.

Teorema 2.11 *En todo triángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres medianas es igual a los tres cuartos de la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres lados.*

Demostración. Para una demostración ver (Marín, 2000). ■

Reescrito en el contexto del álgebra geométrica bidimensional.

Teorema 2.12 *Dado un triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario). Sean D, E y $F \in \mathbb{E}^2$ puntos medios de AB, BC y $AC \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ respectivamente, entonces:*

$$AE^2 + BF^2 + CD^2 = \frac{3}{4}(AC^2 + AB^2 + BC^2)$$

siendo $AE, BF, CD \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Demostración.

Por hipótesis y la afirmación anterior se tiene

$$AB = AF + FB.$$

Como F es punto medio de AC se sigue

$$AB = \frac{AC}{2} + FB. \quad (2.1.8)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (2.1.8)

$$AB^2 = \frac{AC^2}{4} + FB^2 + \|AC\| \|FB\| \cos \mu \angle (FA, FB). \quad (2.1.9)$$

Análogamente, si $BC = BF + FC$ se implica

$$BC^2 = \frac{AC^2}{4} + FB^2 + \|AC\| \|FB\| \cos \mu \angle (FB, FC) \quad (2.1.10)$$

siendo, $\mu \angle (FA, FB) = \pi - \mu \angle (FB, FC)$, (Calvet, 2007)

$$\cos \mu \angle (FB, FC) = -\cos \angle (FA, FB). \quad (2.1.11)$$

Usando (2.1.11) en (2.1.10)

$$BC^2 = \frac{AC^2}{4} + FB^2 - \|AC\| \|FB\| \cos \mu \angle (FA, FB). \quad (2.1.12)$$

Sumando las ecuaciones (2.1.9) y (2.1.12)

$$AB^2 + BC^2 = \frac{AC^2}{2} + 2BF^2. \quad (2.1.13)$$

Análogamente, se obtiene

$$AC^2 + BC^2 = \frac{AB^2}{2} + 2CD^2 \quad (2.1.14)$$

y

$$AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AE^2. \quad (2.1.15)$$

Finalmente, sumando las ecuaciones (2.1.13), (2.1.14) y (2.1.15)

$$AE^2 + BF^2 + CD^2 = \frac{3}{4}(AC^2 + AB^2 + BC^2).$$

■

Aquí mostraremos una aplicación del Teorema de los Puntos Medios, (Berger, 2009) y (Barker and Howe, 2007), el cual es muy utilizado para resolver problemas sobre áreas orientadas.

Ahora enunciamos otro resultado de la geometría euclidiana.

Teorema 2.13 *En todo triángulo, al unir los puntos medios de sus tres lados, se forman cuatro triángulos parciales de regiones equivalentes.*

Demostración. Para una demostración ver (Marín, 2000). ■

Enunciándolo en el contexto del álgebra geométrica bidimensional.

Propiedad 2.14 *Dado un triángulo (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$. Sean D, E y $F \in \mathbb{E}^2$ puntos medios de AB, BC y $AC \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ respectivamente, entonces $A_{DEF} = \frac{1}{4}A_{ABC}$.*

Demostración.

Usando la definición 2.1.1

$$A_{DEF} = \frac{1}{2}DE \uparrow DF$$

donde DE y $DF \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Haciendo uso del teorema de los puntos medios, ver (Barker and Howe, 2007)

$$A_{DEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2} \uparrow \frac{BC}{2}\right). \quad (2.1.16)$$

Haciendo uso de la propiedad de bilinealidad del producto exterior en (2.1.16)

$$A_{DEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{CA \uparrow CB}{4}\right). \quad (2.1.17)$$

Usando la definición 2.1.1 en la ecuación (2.1.17)

$$A_{DEF} = \frac{1}{4}A_{ABC}.$$

■

2.1.2. Bisectores perpendiculares y el circuncentro

En esta sección mostraremos algunos resultados sobre los bisectores perpendiculares y el **circuncentro** en el espacio \mathbb{E}^2 . Además enunciaremos algunos resultados muy útiles en el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.15 *El bisector perpendicular de un segmento de extremos P y $Q \in \mathbb{E}^2$, denotado como \mathcal{M}_{PQ} , se define como:*

$$\mathcal{M}_{PQ} = \{A \in \mathbb{E}^2 : \|AP\| = \|AQ\|\}. \quad (2.1.18)$$

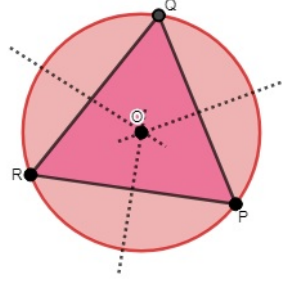


Figura 2.3: Bisectores perpendiculares y el circuncentro

Una vez definido el **bisector perpendicular**, se puede mostrar la ecuación algebraica del punto notable conocido como el **circuncentro**.

Teorema 2.16 *Los tres bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), se encuentran en un único punto llamado **circuncentro** que viene a ser centro del círculo circunscrito al triángulo mencionado.*

Demostración.

Dado un triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$, sea $O \in \mathcal{M}_{AB} \cap \mathcal{M}_{BC}$ entonces, por la definición 2.15,

$$\|OA\| = \|OB\| \quad y \quad \|OB\| = \|OC\|$$

Por lo tanto

$$\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$$

.

■

Vamos a usar este resultado para calcular la ecuación álgebra geométrica del circuncentro.

Propiedad 2.17 *Sea $X \in \mathbb{E}^2$ un punto fijo cualquiera. Dado cualquier triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) y circuncentro $O \in \mathbb{E}^2$, se implica que la ecuación del circuncentro es:*

$$XO = -(XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ)(2PQ \uparrow QR)^{-1} \quad (2.1.19)$$

donde QR, RP y $PQ \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Demostración. Sabemos por el teorema anterior:

$$\|OP\|^2 = \|OQ\|^2 = \|OR\|^2 = d^2,$$

siendo d la longitud del radio del círculo circunscrito y $OP, OQ, OR \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Escribiendo cada vector de la ecuación anterior como una diferencia de vectores con origen en X :

$$(XP - XO)^2 = (XQ - XO)^2 = (XR - XO)^2 = d^2 \quad (2.1.20)$$

De la primera igualdad en la ecuación (2.1.20):

$$XP^2 - 2XP.XO + XO^2 = XQ^2 - 2XQ.XO + XO^2 \quad (2.1.21)$$

Simplificando y agrupando términos conteniendo O en el lado izquierdo de la ecuación (2.1.21), se consigue:

$$\begin{aligned} 2(XQ - XP).XO &= XQ^2 - XP^2 \\ \Rightarrow 2PQ.XO &= XQ^2 - XP^2 \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Análogamente de la segunda igualdad de (2.1.20), resulta:

$$2QR.XO = XR^2 - XQ^2 \quad (2.1.23)$$

Introduciendo el producto geométrico en lugar del producto interior, (Hestenes, 2012) en (2.1.22) y (2.1.23):

$$PQXO + XOPQ = XQ^2 - XP^2 \quad (2.1.24)$$

y

$$QRXO + XOQR = XR^2 - XQ^2. \quad (2.1.25)$$

La ecuación (2.1.25), multiplicada a la derecha por el vector PQ , menos la ecuación (2.1.24) multiplicada a la izquierda por QR , da como resultado:

$$PQQRXO - XOPQQR = PQXR^2 - PQXQ^2 - XQ^2QR + XP^2QR. \quad (2.1.26)$$

Usando la fórmula geométrica de Euler (1.5.4) y simplificando la ecuación (2.1.26), se tiene:

$$PQQRXO - QRXPQXO = XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ. \quad (2.1.27)$$

Introduciendo el producto exterior en lugar del producto geométrico en la ecuación (2.1.27), nos conduce a la siguiente ecuación:

$$2(PQ \uparrow QR)XO = XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ. \quad (2.1.28)$$

Multiplicando por la inversa del producto exterior en el lado izquierdo de la ecuación (2.1.28):

$$XO = (2PQ \uparrow QR)^{-1}(XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ) \quad (2.1.29)$$

Finalmente, como el producto de un vector con un bivector no es simétrico, (Vera Saravia, 2016), de la ecuación (2.1.29), se obtiene:

$$XO = -(XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ)(2PQ \uparrow QR)^{-1} \quad (2.1.30)$$

■

De aquí deduciremos el radio del círculo, también llamado **circunradio**.

Propiedad 2.18 *Dado un triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) y circuncentro $O \in \mathbb{E}^2$, tiene por medida de circunradio*

$$\begin{aligned} \|OP\| &= \frac{\|PQ\| \|QR\| \|RP\|}{2\|PQ \uparrow QR\|} = \frac{\|PQ\|}{2 \sin \mu \angle (RP, RQ)} = \\ &= \frac{\|QR\|}{2 \sin \mu \angle (PQ, PR)} = \frac{\|RP\|}{2 \sin \mu \angle (QR, QP)} \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

donde OP, PQ, QR y $RP \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Demostración. Sea $X \in \mathbb{E}^2$ un punto fijo cualquiera y consideremos, sin pérdida de generalidad:

$$OP := XP - XO. \quad (2.1.32)$$

Usando (2.1.30) en (2.1.32):

$$OP = XP + (XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ)(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \quad (2.1.33)$$

Extrayendo la inversa del área como factor común en (2.1.33):

$$OP = (2XP(PQ \uparrow QR) + XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ)(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \quad (2.1.34)$$

De (2.1.34) se implica:

$$\begin{aligned} OP &= (2XP(XQ \uparrow XR + XR \uparrow XP + XP \uparrow XQ) + XP^2QR + XQ^2RP + \\ &\quad XR^2PQ)(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Introduciendo el producto geométrico en lugar del producto exterior (Vera Saravia, 2016) y escribiendo cada vector como una diferencia de vectores en (2.1.35):

$$\begin{aligned} OP &= (XP(XQXR - XRXQ + XRX P - XPXR + XPXQ - XQXP) \\ &\quad + XP^2(XR - XQ) + XQ^2(XP - XR) + XR^2(XQ - XP))(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Simplificando (2.1.36):

$$\begin{aligned} OP &= (XPXQXR - XPXRXQ + XPXRXR - XPXQXP + \\ &+ XQ^2XP - XQ^2XR + XR^2XQ - XR^2XP)(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

De aquí se sigue:

$$OP = (XQ - XP)(XR - XQ)(XP - XR)(2PQ \uparrow QR)^{-1}.$$

Luego:

$$OP = -(PQ)(QR)(RP)(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \quad (2.1.38)$$

Análogamente:

$$OQ = -(QR)(RP)(PQ)(2PQ \uparrow QR)^{-1} \quad (2.1.39)$$

y

$$OR = -(RP)(PQ)(QR)(2PQ \uparrow QR)^{-1}. \quad (2.1.40)$$

Por consiguiente, los radios del círculo circunscrito es la longitud de cualquiera de estos vectores encontrados en (2.1.38), (2.1.39) y (2.1.40):

$$\begin{aligned} \|OP\| &= \frac{\|PQ\|\|QR\|\|RP\|}{2\|PQ \uparrow QR\|} = \frac{\|PQ\|}{2 \operatorname{sen} \mu \angle (RP, RQ)} = \\ &= \frac{\|QR\|}{2 \operatorname{sen} \mu \angle (PQ, PR)} = \frac{\|RP\|}{2 \operatorname{sen} \mu \angle (QR, QP)}. \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

■

2.1.3. Bisectrices e incentro

En esta sección, se estudia un punto notable conocido como el **incentro**, el cual se encuentra al intersectar como mínimo dos bisectrices interiores de ángulos interiores orientados en un mismo sentido.

Definición 2.19 *Dados $u, v \in S^1$, la bisectriz del ángulo orientado de u hacia v , denotada por $\mathcal{B} \angle (u, v)$, se define así:*

$$\mathcal{B} \angle (u, v) := \{w \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2 : \mu \angle (u, w) = \mu \angle (w, v)\}.$$

Afirmación 2.20 *Sean los vectores linealmente independientes $u, v \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$. Si $w \in \mathcal{B} \angle (u, v)$, entonces*

$$\frac{\|w \uparrow u\|}{\|u\|} = \frac{\|w \uparrow v\|}{\|v\|}$$

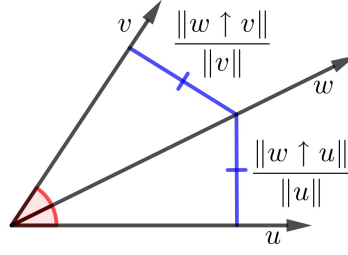


Figura 2.4: Bisectriz de un ángulo.

Demostración. $\frac{\|w \uparrow u\|}{\|u\|} = \frac{\|w\|\|u\|}{\|u\|} |\sin \mu \angle(w, u)| = \frac{\|w\|\|v\|}{\|v\|} |\sin \mu \angle(v, w)| = \frac{\|w \uparrow v\|}{\|v\|}.$
 ■

Esto significa, que cualquier punto sobre la bisectriz es equidistante de los lados que forman el ángulo y que si este punto es el **incentro**, entonces equidista de los tres lados del triángulo.

Afirmación 2.21 Las tres bisectrices lineales de los ángulos orientados de un triángulo cualquiera con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$, (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) se encuentran en un único punto llamado **incentro**, que es el centro del círculo inscrito en el triángulo.

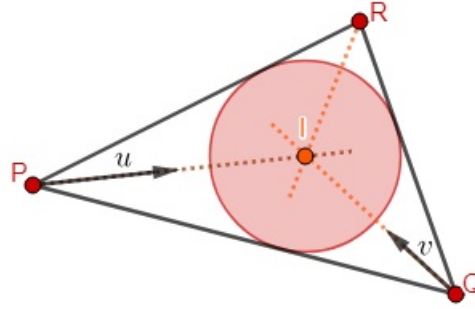


Figura 2.5: Bisectores angulares e incentro

Demostración. Dado un triángulo cualquiera con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), vamos a calcular la ecuación de la bisectriz angular que pasa a través de P . Sean la suma de los vectores unitarios de ambos lados adyacentes:

$$\mu = \frac{PQ}{\|PQ\|} + \frac{PR}{\|PR\|} \quad v = \frac{QP}{\|QP\|} + \frac{QR}{\|QR\|} \quad (2.1.42)$$

siendo PQ, PR y $QR \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Sea $X \in \mathbb{E}^2$ un punto fijo cualquiera e incentro $I \in \mathbb{E}^2$ que resulta de la intersección de la bisectriz angular que pasa a través de P , cuyo vector dirección es $\mu \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ y la bisectriz angular que pasa a través de Q con vector dirección $v \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$,

$$XI := XP + k\mu = XQ + mv \quad \text{para algún } k, m \in \mathbb{R} \quad (2.1.43)$$

Agrupando términos en (2.1.43), encontramos PQ como una combinación lineal de μ y v :

$$k\mu - mv = XQ - XP = PQ. \quad (2.1.44)$$

Multiplicando a la derecha de (2.1.44) por el vector v :

$$\begin{aligned} (k\mu - mv) \uparrow v &= PQ \uparrow v, \\ \Rightarrow k(\mu \uparrow v) &= PQ \uparrow v. \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

Multiplicando por $(\mu \uparrow v)^{-1}$ en (2.1.45) y usando (2.1.42), se obtiene:

$$\begin{aligned} k &= \frac{PQ \uparrow v}{\mu \uparrow v} = \frac{PQ \uparrow \left(\frac{QP}{\|QP\|} + \frac{QR}{\|QR\|} \right)}{\left(\frac{PQ}{\|PQ\|} + \frac{PR}{\|PR\|} \right) \uparrow \left(\frac{QP}{\|QP\|} + \frac{QR}{\|QR\|} \right)}, \\ \Rightarrow k &= \frac{\|PQ\| \|RP\| (PQ \uparrow QR)}{(PQ \uparrow QR) \|RP\| + (QR \uparrow RP) \|PQ\| + (RP \uparrow PQ) \|QR\|}. \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

Puesto que todos los productos exteriores en (2.1.46) son iguales, ya que son iguales al doble del área del triángulo PQR , simplificando resulta:

$$k = \frac{\|PQ\| \|RP\|}{\|RP\| + \|PQ\| + \|QR\|}. \quad (2.1.47)$$

Usando lo obtenido en la ecuación (2.1.47) en (2.1.43), se consigue:

$$XI = \frac{XP(\|RP\| + \|PQ\| + \|QR\|) + (XQ - XP)\|PR\| + (XR - XP)\|PQ\|}{\|RP\| + \|PQ\| + \|QR\|}. \quad (2.1.48)$$

Simplificando la ecuación (2.1.48), se llega a:

$$XI = \frac{XP\|QR\| + XQ\|PR\| + XR\|PQ\|}{\|RP\| + \|PQ\| + \|QR\|}. \quad (2.1.49)$$

Para encontrar el radio del círculo, primero debemos obtener el vector IP :

$$IP = XP - XI = \frac{QP\|RP\| + RP\|PQ\|}{\|QR\| + \|RP\| + \|PQ\|}. \quad (2.1.50)$$

El radio del círculo es la distancia desde I hasta PQ , denotado por $d(I, PQ)$:

$$d(I, PQ) = \frac{\|PI \uparrow PQ\|}{\|PQ\|}. \quad (2.1.51)$$

Usando lo conseguido en (2.1.50) y reemplazado en (2.1.51):

$$d(I, PQ) = \frac{\|RP \uparrow PQ\|}{\|QR\| + \|RP\| + \|PQ\|}. \quad (2.1.52)$$

De las ecuaciones (2.1.52) y (2.1.41), se obtiene la siguiente relación de radios:

$$\frac{\text{radio del círculo circunscrito}}{\text{radio del círculo inscrito}} = \frac{1}{2} \frac{\|PQ\|\|QR\|\|RP\|}{\|PQ\| + \|QR\| + \|RP\|}.$$

■

2.2. Altura y ortocentro

En esta sección estudiaremos el punto notable llamado **ortocentro**, se obtendrá su ecuación y algunas de sus propiedades usando herramientas ya conocidas en el álgebra geométrica bidimensional.

Definición 2.22 *La altura de un lado del triángulo es el segmento perpendicular a este lado, también llamado **base**, que pasa a través del vértice opuesto.*

Afirmación 2.23 *Dado un triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), sus tres alturas se intersecan en un único punto, $H \in \mathbb{E}^2$ llamado **ortocentro**.*

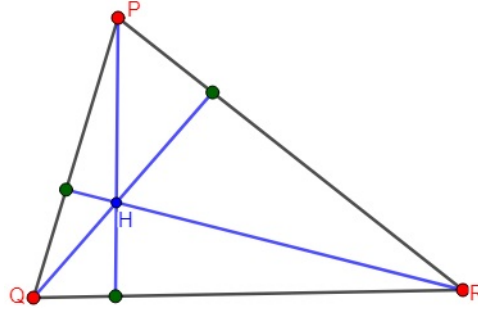


Figura 2.6: Altura y ortocentro

Demostración.

Sean $X \in \mathbb{E}^2$ un punto fijo cualquiera y $H \in \mathbb{E}^2$ es punto de concurrencia de la altura, que

pasa a través del vértice P y es perpendicular a la base $QR \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ y de la altura que pasa a través de Q y es perpendicular a $PR \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, es decir:

$$XH = XP + zQR, \quad z \in \mathbb{R}i \quad (2.2.1)$$

y

$$XH = XQ + tRP, \quad t \in \mathbb{R}i \quad (2.2.2)$$

Igualando (2.2.1) y (2.2.2), obtenemos un vector escrito como una combinación lineal de dos vectores pero con coeficientes imaginarios:

$$zQR - tRP = PQ. \quad (2.2.3)$$

Multiplicando el lado derecho de (2.2.3) por RP :

$$zQRRP - tRP^2 = PQRP. \quad (2.2.4)$$

Multiplicando el lado izquierdo de (2.2.3) por RP y teniendo en cuenta que los vectores con los números imaginarios anticonmutan (Vera Saravia, 2016):

$$-zRPQR + tRP^2 = RPPQ. \quad (2.2.5)$$

Sumando las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5):

$$\begin{aligned} z(QRRP - RPQR) &= PQRP + RPPQ. \\ \Rightarrow z &= \frac{PQRP + RPPQ}{QRRP - RPQR} = \frac{PQ \cdot RP}{QR \uparrow RP} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Análogamente, se encuentra:

$$t = \frac{PQ \cdot QR}{QR \uparrow RP}$$

Reemplazando (2.2.6) en (2.2.1):

$$XH = XP + (PQRP + RPPQ)(QRRP - RPQR)^{-1}QR. \quad (2.2.7)$$

Puesto que el vector QR anticonmuta mediante el producto exterior con un número imaginario (Vera Saravia, 2016), resulta:

$$XH = XP - (PQRP + RPPQ)QR(QRRP - RPQR)^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Extrayendo el área como factor común, se obtiene:

$$\begin{aligned} XH &= (XP(QRRP - RPQR) \\ &\quad - (PQRP + RPPQ)QR(QRRP - RPQR)^{-1}). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Usando el hecho de que $PQ = XQ - XP$, etc. en (2.2.9), nos conduce a:

$$XH = (XPQRRP - XQRPQR - XPPQQR + XRPQQR)(QRRP - RPQR)^{-1}.$$

Agrupando los términos convenientemente después de efectuar el producto, se obtiene:

$$XH = (XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ + XPQRXP + XQRPXQ + XRPQXR) \\ (QRRP - RPQR)^{-1}.$$

$$\therefore XH = ((XP(XP.QR) + XQ(XQ.RP) + XR(XR.PQ))(QR \uparrow RP)^{-1}. \quad (2.2.10)$$

■

Observación 2.24 De los resultados anteriores podemos concluir los siguiente:

1. La ecuación (2.2.10) es invariante bajo permutación cíclica de los vértices. Por lo tanto las alturas se intersecan sobre un único punto llamado ortocentro.
2. La ecuación del ortocentro se parece a la del circuncentro.

Con la ayuda de la figura 2.6 verificaremos la parte 2 de la observación 2.24, dibujemos una línea que pase a través de P y sea paralela al lado opuesto QR ; otra que pasa a través de Q y sea paralela a RP y una tercera línea pasando a través de R y sea paralela a PQ , como puede verse en la figura 2.7. Sea A la intersección de la línea que pasa a través de Q y R , B la intersección de la línea que pasa a través de P y R . Por último, sea C punto de intersección de la línea que pasa a través de P y Q .

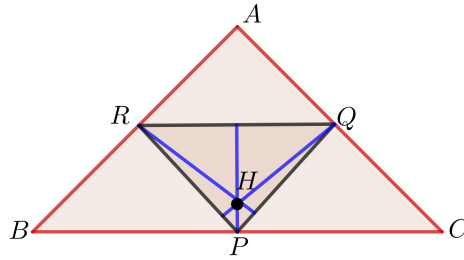


Figura 2.7: Relación de áreas triangulares

De la figura 2.7, se puede afirmar lo siguiente:

1. Dado un punto fijo cualquiera $X \in \mathbb{E}^2$. El triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$ es directamente similar al triángulo P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ con razón -2 :

$$PQ = -\frac{1}{2}AB, \quad QR = -\frac{1}{2}BC, \quad RP = -\frac{1}{2}CA. \quad (2.2.11)$$

siendo P, Q y R puntos medios de los lados del triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$:

$$XP = \frac{XB + XC}{2}, \quad XQ = \frac{XC + XA}{2}, \quad XR = \frac{XA + XB}{2}. \quad (2.2.12)$$

2. Las alturas del triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$, son las bisectrices perpendiculares de los lados del triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$ y el **ortocentro** del triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ es el **circuncentro** del triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$.

De hecho para probar con álgebra estos hechos geométricos, solo debemos deducirlos de las ecuaciones (2.2.11) y (2.2.12) sustituidas en la ecuación del ortocentro (2.2.10):

$$XP(XP.QR) = \frac{XB^3 - XBXC^2 + XCXB^2 - XC^3}{8}, \quad (2.2.13)$$

$$XQ(XQ.RP) = \frac{XC^3 - XCXA^2 + XAXC^2 - XC^3}{8}, \quad (2.2.14)$$

$$XR(XR.PQ) = \frac{XA^3 - XAXB^2 + XBXA^2 - XB^3}{8}. \quad (2.2.15)$$

Sumando (2.2.13), (2.2.14) y (2.2.15), se observa que las potencias cúbicas se anulan. Por otra parte, usando (2.2.11) el área del triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ es cuatro veces más pequeña que el área del triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$:

$$RQ \uparrow RP = \frac{CB \uparrow CA}{4}, \quad (2.2.16)$$

Por consiguiente, usando lo obtenido en las ecuaciones (2.2.13), (2.2.14), (2.2.15) y (2.2.16) en (2.2.10), resulta la ecuación del circuncentro

$$\begin{aligned} XH &= (-XBXC^2 + XCXB^2 - XCXA^2 + XAXC^2 - XAXB^2 + XBXA^2)(2BC \uparrow CA)^{-1} \\ \therefore XH &= -(XA^2BC + XB^2CA + XC^2AB)(2BC \uparrow CA)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

2.3. Recta de Euler

En esta sección estudiaremos la Recta de Euler (Barker and Howe, 2007), usando las herramientas del álgebra geométrica bidimensional, que como se sabe es una recta

en la que están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo; incluye al punto de Exeter (Moise, 1990) y (Barker and Howe, 2007), y al centro de la circunferencia de los nueve puntos notables de un triángulo escaleno (Barker and Howe, 2007) denominado así en honor al matemático suizo, Leonhard Euler, quien demostró la colinealidad de los mencionados puntos notables de un triángulo en 1765 (Berger, 2009). Se presentará este resultado en la versión euclidiana.

Teorema 2.25 *Para cualquier triángulo, el circuncentro C_c (el cual es igual a O'_c , el ortocentro del triángulo medio), el centroide M , el ortocentro O_c y el circuncentro C'_c del triángulo medio, se encuentran sobre una recta. El punto C_c está sobre un lado de M , mientras que C'_c y O_c están sobre el otro. Además,*

$$MO_c = C_cM \quad y \quad MC'_c = \frac{1}{2}C_cM = \frac{1}{4}MO_c$$

En particular C'_c , es el punto medio del segmento de recta $\overline{C_cO_c} = \overline{O'_cO_c}$.

Demostración. Para una demostración ver (Berger, 2009). ■

Escribiendo este resultado con el enfoque del álgebra geométrica bidimensional AG(2),

Afirmación 2.26 *Sean G , O y $H \in \mathbb{E}^2$. El baricentro $G \in \mathbb{E}^2$, el circuncentro $O \in \mathbb{E}^2$ y el ortocentro $H \in \mathbb{E}^2$ de un triángulo con vértices P, Q y $R \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) están siempre alineados sobre la recta de Euler.*

Demostración. Sea $X \in \mathbb{E}^2$. Se observa que las ecuaciones del ortocentro y la del circuncentro tienen el área del triángulo como un "denominador", mientras que la ecuación del centroide no, pero podemos introducirlo en (2.1.7):

$$XG = \frac{XP + XQ + XR}{3} = \frac{XP + XQ + XR}{3}(QR \uparrow RP)(QR \uparrow RP)^{-1} \quad (2.3.1)$$

siendo QR y $RP \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Escribiendo cada vector como una diferencia de sus extremos y utilizando el producto geométrico en lugar del producto exterior (Vera Saravia, 2016), se obtiene:

$$\begin{aligned} QR \uparrow RP &= XP \uparrow XQ + XQ \uparrow XR + XR \uparrow XP \\ &= \frac{XPXQ - XQXP + XQXR - XRXQ + XRX P - XRX P}{2}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Introduciendo la igualdad (2.3.2) en la ecuación del centroide (2.3.1), se convierte:

$$XG = (XP + XQ + XR)(XPXQ - XQXP + XQXR - XRXQ$$

$$+ X R X P - X P X R)(6 Q R \uparrow R P)^{-1}. \quad (2.3.3)$$

Usando la propiedad distributiva (Vera Saravia, 2016) en (2.3.3):

$$\begin{aligned} X G = & (X P X P X Q - X P X Q X P + X P X R X P - X P X P X R + \\ & + X Q X P X Q - X Q X Q X P) + X Q X Q X R - X Q X R X Q + \\ & + X R X Q X R - X R X R X Q + X R X R X P - X R X P X R)(6 Q R \uparrow R P)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Agrupando convenientemente de tal modo que la diferencia de vectores sea escrita como un vector libre, se llega a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} X G = & (-X P^2 Q R + X P Q R X P - X Q^2 R P + X Q R P X Q - X R^2 P Q + \\ & X R P Q X R)(6 Q R \uparrow R P)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Utilizando las ecuaciones del ortocentro (2.1.30) y del circuncentro (2.2.10) en (2.3.5), resulta:

$$X G = \frac{X H + 2 X O}{3}. \quad (2.3.6)$$

Por lo tanto, el centroide está ubicado entre el ortocentro y el circuncentro, y su distancia desde el ortocentro es el doble de su distancia desde el circuncentro. ■

2.4. El Punto de Fermat

El Punto de Fermat de un triángulo, también llamado Punto de Torricelli, es un punto tal que la distancia total desde los tres vértices del triángulo al punto es la mínima posible. Su nombre se debe a que el problema fue planteado originalmente por Fermat en una carta enviada a Evangelista Torricelli, quien lo resolvió. El pupilo de Evangelista Torricelli, llamado Viviani, publicó la solución en 1659 (Barker and Howe, 2007).

Construcción. (Hacemos hincapié que todos los puntos mencionado están en \mathbb{E}^2).

Sobre cualquier lado de un triángulo A, B y $C \in \mathbb{E}^2$. se dibuja un triángulo equilátero, 2.8.

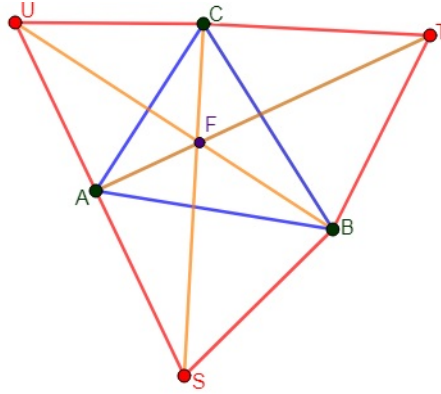


Figura 2.8: Punto de Fermat F .

Ahora se estudiará un resultado de la geometría euclidiana.

Teorema 2.27 *Dado un triángulo acutángulo ΔABC , encontrar el punto p que minimiza la suma de las distancias de p a los vértices, es decir,*

$$pA + pB + pC$$

El punto p es llamado el punto de Fermat del ΔABC .

Demostración. Para una demostración ver (Barker and Howe, 2007). ■

Reescrito en el contexto del álgebra geométrica bidimensional.

Propiedad 2.28 *Sean T, U y $S \in \mathbb{E}^2$ vértices de los triángulos equiláteros, respectivamente opuestos a A, B y $C \in \mathbb{E}^2$. Luego los segmentos AT, BU y $CS \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ tienen la misma longitud, forman ángulos $\frac{2\pi}{3}$ y se intersectan sobre un único punto $F \in \mathbb{E}^2$, llamado el Punto de Fermat. Además, la suma de las tres distancias desde cualquier punto $P \in \mathbb{E}^2$ a cada vértice es mínima, cuando P es el Punto de Fermat, siempre que cualquiera de los ángulos orientados interiores del triángulo con vértices A, B y $C \in \mathbb{E}^2$ (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), sea mayor a $\frac{2\pi}{3}$.*

Demostración. Se demostrará, que BU es obtenido de AT por medio de una rotación de $\frac{2\pi}{3}$, que será representado mediante el número complejo $t = \mathbf{e}^{\frac{2\pi}{3}i}$:

$$ATt = (AC + CT)t = ACt + CTt \quad (2.4.1)$$

Por construcción, se observa en la figura 2.8 que los vectores ACt y $CA t^{-\frac{t}{2}} = CU$ son iguales, ya que su producto exterior se anula. Análogamente, se encuentra $CTt = BC$. Por consiguiente, de la ecuación (2.4.1) resulta:

$$ATt = CU + BC = BU. \quad (2.4.2)$$

Seguidamente, se obtiene $CS = BUt$ y $AT = CS$, esto significa que los vectores CS , BU y AT tienen la misma longitud y cada uno es obtenido del otro por rotaciones sucesivas de $\frac{2\pi}{3}$.

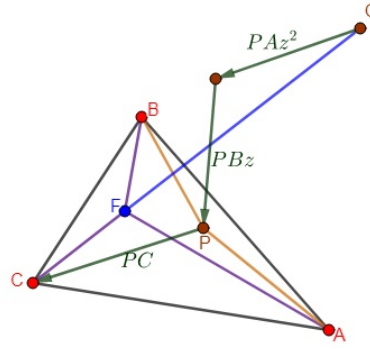


Figura 2.9: Triángulo con vértices A , B y $C \in \mathbb{E}^2$ y punto interior P .

Para mostrar que la suma de las distancias desde P a los tres vértices A , B y C es mínima, cuando P es el punto de Fermat. Se debe probar que la suma vectorial de PA girado $\frac{4\pi}{3}$, PB girado $\frac{2\pi}{3}$ y PC es constante, independientemente del punto P , ver figura 2.9.

Para cualquier par de puntos P y $P' \in \mathbb{E}^2$, siempre es cierto que:

$$PA t^2 + PB t + PC = P' A t^2 + P' B t + P' C \quad (2.4.3)$$

siendo $P' A$, $P' B$ y $P' C \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Hecho que es probado agrupando todos los términos en un lado de la ecuación (2.4.3):

$$PP'(t^2 + t + 1) = 0. \quad (2.4.4)$$

Este producto en (2.4.4), es siempre cero ya que $t^2 + t + 1 = 0$. Por lo tanto, existe un único punto Q tal que:

$$PA t^2 + PB t + PC = QC. \quad (2.4.5)$$

Para cualquier punto P , los tres segmentos forman una línea quebrada, como se muestra en la figura 2.9.

Por tanto, por la desigualdad triangular (Hestenes, 2012), en (2.4.5), se tiene:

$$\|PA\| + \|PB\| + \|PC\| \geq \|QC\|.$$

Cuando P es el punto de Fermat F , estos segmentos forman una línea recta. Entonces la suma de distancias de F a los tres vértices es mínima, siempre que ningún ángulo del triángulo sea mayor que $\frac{2\pi}{3}$:

$$\|FA\| + \|FB\| + \|FC\| = \|QC\| \leq \|PA\| + \|PB\| + \|PC\|$$

con FA, FB, FC, QC, PA, PB y $PC \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

En otros casos, algunos de los vectores FA , FB o FC tienen un sentido opuesto a los otros, de modo que su longitud se resta de los otros y su suma no es mínima. ■

Capítulo 3

Sobre similaridad y razón singular

Dos figuras geométricas son similares si ellos tienen la misma forma. Si la orientación de ambas figuras es la misma, decimos que son directamente similares. Por otro lado dos figuras pueden tener la misma forma pero diferente orientación. Entonces ellos son opuestamente similares. Por ejemplo nuestras manos son opuestamente similares. Sin embargo estos conceptos intuitivos son insuficientes y la similaridad debe ser definida con mayor precisión.

3.1. Similaridad directa

Definición 3.1 (*Proporcionalidad Geométrica*). Dados u, v, w y $t \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, decimos que los vectores u y v son geométricamente proporcionales a los vectores w y t , si se cumple lo siguiente:

$$\mu\angle(u, v) = \mu\angle(w, t) \text{ y } \frac{\|u\|}{\|v\|} = \frac{\|w\|}{\|t\|} \iff uv^{-1} = wt^{-1}.$$

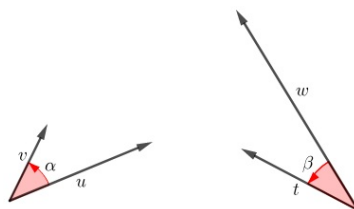


Figura 3.1: Vectores geométricamente proporcionales.

Esta definición de cociente geométrico, es también válido para los vectores en el espacio tridimensional, siempre que los cuatro vectores se encuentren en el mismo plano.

Definición 3.2 *Decimos que dos triángulos con la misma orientación, son directamente similares, si tienen tres pares de vectores geoméricamente proporcionales a los del otro triángulo.*

La proporcionalidad geométrica para vectores permite definir la similaridad de triángulos.

Definición 3.3 *Dados los triángulos con vértices A, B, C y $A', B', C' \in \mathbb{E}^2$, (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos los triángulos en el mismo sentido), decimos que son **directamente similares**, si*

$$AB^{-1}A'B' = BC^{-1}B'C' = CA^{-1}C'A' = r \in \mathbb{C}$$

siendo $AB^{-1}, A'B', BC^{-1}, B'C', CA^{-1}$ y $C'A' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

La **razón de similaridad directa**, denotada con r en la definición 3.3, permite identificar los pares de “lados homólogos” como un cociente.

Definición 3.4 *Definimos la razón de la similaridad directa, denotada como r así:*

$$r := \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|} \mathfrak{e}^{(\mu \angle (AB, A'B'))i},$$

donde:

1. $|r|$ es el tamaño de la razón.
2. $\mu \angle (AB, A'B')$ es la medida del ángulo de rotación orientado del triángulo con vértices A', B', C' respecto al triángulo de vértices A, B, C todos en \mathbb{E}^2 .

La razón de similaridad, se puede generalizar a cualquier par de polígonos de la siguiente manera:

Definición 3.5 *Sean los polígonos A_1, \dots, A_n y A'_1, \dots, A'_n con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el polígono en el mismo sentido). Decimos que son directamente similares, con razón r , si tienen n pares de vectores geoméricamente proporcionales a n pares de vectores del otro polígono.*

$$r = A_1 A_2^{-1} A'_1 A'_2 = \dots = A_n A_1^{-1} A'_n A'_1$$

con $A_1A_2^{-1}, A'_1A'_2, \dots, A_nA_1^{-1}$ y $A'_nA'_1 \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$
además:

1. El modulo de r , denotado como $|r|$ indica el tamaño de la razón de ambos polígonos.
2. $\mu\angle(A_1A_2, A'_1A'_2)$ es el ángulo orientado de rotación de ambos polígonos.

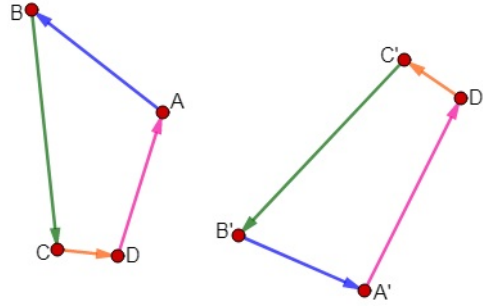


Figura 3.2: Similitud directa para polígonos

Observación 3.6 La similitud, con $|r| = 1$ es llamada **desplazamiento**, si ambos polígonos tienen el mismo tamaño y orientación.

Proposición 3.7 La similitud directa es una relación de equivalencia.

Demostración. Sugerencia.

Para mostrar la reflexión, la simetría y la transitividad basta usar las definiciones 3.3 y 3.4. ■

Esto significa que existen clases de equivalencia con figuras directamente similares.

3.2. Similitud opuesta

Definición 3.8 Dos triángulos A, B, C y A', B', C' con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos los triángulos en el mismo sentido), tienen similitud opuesta, si se cumple:

$$(AB)(BC)^{-1} = ((A'B')(B'C')^{-1})^* := (B'C')^{-1}(A'B'),$$

$$(BC)(CA)^{-1} = ((B'C')(C'A')^{-1})^* := (C'A')^{-1}(B'C'),$$

$$(CA)(AB)^{-1} = ((C'A')(A'B')^{-1})^* := (A'B')^{-1}(C'A'),$$

siendo $AB, A'B', BC, B'C', CA$ y $C'A' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Debido a esta definición, no se puede definir la razón para la similaridad opuesta, pero si se puede obtener el tamaño de la razón, cual es el cociente de las longitudes de cualquier par de “lados homólogos” de un par de poligonos.

Observación 3.9 *El Producto Geométrico satisface la reversión como se puede ver en (Hestenes, 2012).*

Proposición 3.10 *Una similaridad opuesta, es siempre la composición de una reflexión en cualquier recta perpendicular a un vector $v \in S^1$ y una similaridad directa.*

Demostración. Dado un par de triángulos A, B, C y A', B', C' con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos los triángulos en sentido contrario), se obtiene por la definición 3.8,

$$ABBC^{-1} = (B'C')^{-1}A'B', \quad (3.2.1)$$

con $AB, A'B', BC$ y $B'C' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Usando la definición 1.28 podemos expresar el miembro derecho de (3.2.1) como una reflexión:

$$-ABBC^{-1} = -vA'B'(B'C')^{-1}v \quad (3.2.2)$$

Multiplicando la ecuación (3.2.2) por AB^{-1} :

$$-BC^{-1} = AB^{-1}(-v)A'B'(B'C')^{-1}v \quad (3.2.3)$$

Multiplicando la ecuación (3.2.3) por $((B'C')^{-1}v)^{-1}$:

$$-BC^{-1}v^{-1}B'C' = AB^{-1}(-v)A'B' \quad (3.2.4)$$

Multiplicando a la derecha de (3.2.4) por v :

$$BC^{-1}((-v)B'C'v) = AB^{-1}((-v)(A'B')v) = r \quad (3.2.5)$$

■

Observación 3.11 En la ecuación (3.2.5), $r \in \mathbb{R}$ es la razón de la similaridad directa cuyo argumento no está definido, pero depende del vector dirección $v \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ perpendicular al eje de reflexión.

No obstante, este resultado puede ser generalizado para definir la similaridad opuesta de un par de polígonos orientados.

Definición 3.12 Decimos que dos polígonos A_1, \dots, A_n y A'_1, \dots, A'_n con vértices en \mathbb{E}^2 , (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos los polígonos en el mismo sentido), tienen similaridad opuesta, si para cualquier vector $v \in S^1$ perpendicular al eje de reflexión se cumple:

$$(A_1 A_2)^{-1} (v^{-1} (A'_1 A'_2)^{-1} v) = (A_2 A_3)^{-1} (v^{-1} (A'_2 A'_3)^{-1} v) = \dots = (A_n A_1)^{-1} (v^{-1} (A'_n A'_1)^{-1} v)$$

con $A_1 A_2, A'_1 A'_2, A_2 A_3, A'_2 A'_3, \dots, A_n A_1$ y $A'_n A'_1 \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

esto es, después de una reflexión, un polígono es directamente similar al otro.

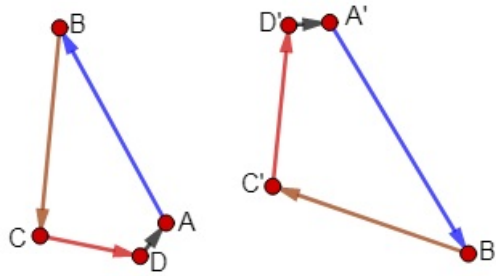


Figura 3.3: Similaridad opuesta para polígonos

Proposición 3.13 Una similaridad opuesta no es reflexiva ni transitiva.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, dos triángulos de vértices A, B, C y D, E, F todos en \mathbb{E}^2 . Si admitieramos que es reflexiva, por la definición 3.8

$$ABBC^{-1} = BC^{-1}AB$$

Pero esto sería una contradicción, ya que el producto geométrico no es conmutativo. Por otra parte, supongamos que sea transitivo, entonces si el triángulo A, B, C es similarmente opuesto a D, E, F y este, similarmente opuesto al triángulo G, H, I , con vértices en \mathbb{E}^2 . Entonces haciendo uso de la definición 3.8

$$ABBC^{-1} = EF^{-1}DE \text{ y } DEEF^{-1} = HI^{-1}GH.$$

Sin embargo, admitir la transitividad, significaría:

$$ABBC^{-1} = HI^{-1}GH,$$

es decir, $EF^{-1}DE = DEEF^{-1}$, lo que es contradictorio, ya que el producto geométrico no es conmutativo. ■

Esta proposición, quiere decir que existen clases de figuras opuestamente similares.

Definición 3.14 *Una similaridad opuesta con $|r| = 1$ se llama **reversal**, si ambos polígonos tienen el mismo tamaño, pero orientaciones opuestas.*

3.3. El Teorema de Menelao

En esta sección se desarrolla la demostración del teorema de Menelao usando herramientas del álgebra geométrica bidimensional, no obstante se presenta como resultado de la geometría euclidiana.

Teorema 3.15 *Toda recta (transversal) a un triángulo, que divide internamente a dos lados y externamente al tercero, determina en dicho triángulo seis segmentos tales que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo en común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.*

Demostración. Para una demostración ver (Barker and Howe, 2007). ■

Ahora este resultado escrito en el contexto del álgebra geométrica bidimensional.

Teorema 3.16 *Para cualquier triángulo $A, B, y C$ con vértices en \mathbb{E}^2 (considerado secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), existen tres puntos D, E y $F \in \mathbb{E}^2$ alineados sobre los lados BC, CA y $AB \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ respectivamente, o sobre sus prolongaciones si y sólo si:*

$$AFFB^{-1}BDDC^{-1}CEEA^{-1} = -1, \quad (3.3.1)$$

con $AF, FB^{-1}, BD, DC^{-1}, CE$ y $EA^{-1} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

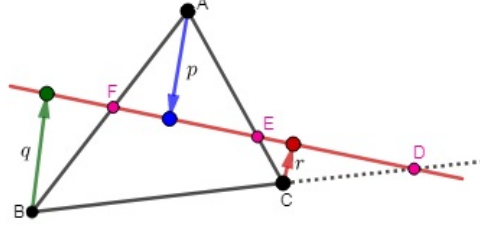


Figura 3.4: Teorema de Menelao

Demostración. Supongamos que D, E y $F \in \mathbb{E}^2$ están alineados sobre una línea recta secante y denotemos por p, q y $r \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, los vectores con origen en los vértices A, B, C en sentido perpendicular a la recta secante, figura 3.4. Entonces cualquier par de triángulos rectángulos, que tienen la hipotenusa sobre un lado común del triángulo ABC , son directamente similares; así se tiene:

$$AF^{-1}BF = pq^{-1}, \quad BD^{-1}CD = qr^{-1}, \quad CE^{-1}AE = rp^{-1} \quad (3.3.2)$$

De la primera igualdad, en la ecuación (3.3.2),

$$AF^{-1}BF = pq^{-1}$$

calculando la inversa en ambos miembros de la ecuación anterior,

$$BF^{-1}AF = qp^{-1}$$

$$AF = BFqp^{-1}$$

aplicando la propiedad de reversión, ver (Calvet, 2007),

$$AF = p^{-1}qBF,$$

$$AFBF^{-1} = p^{-1}q,$$

$$\therefore AFFB^{-1} = -p^{-1}q.$$

Análogamente, para el resto de igualdades en la ecuación (3.3.2) Luego, se obtiene:

$$(AF)(FB)^{-1}(BD)(DC)^{-1}(CE)(EA)^{-1} = (-p^{-1}q)(-q^{-1}r)(-r^{-1}p) = -1.$$

Recíprocamente, dado un punto cualquiera $X \in \mathbb{E}^2$ y sea F un punto sobre el lado AB , D un punto sobre el lado BC y E un punto sobre el lado CA ,

$$XF := aXA + (1 - a)XB,$$

$$\begin{aligned}
XD &:= bXB + (1-b)XC, \\
XE &:= cXC + (1-c)XA,
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

con a, b y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
AF &= (1-a)AB, & FB &= aAB, & BD &= (1-b)BC, \\
DC &= bBC, & CE &= (1-c)CA, & EA &= cCA
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Reemplazando (3.3.4) en (3.3.1):

$$\begin{aligned}
\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} &= -1 \\
\Rightarrow c &= \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b}.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Reemplazando (3.3.5) en (3.3.3) resulta:

$$\begin{aligned}
XE &= \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b}XC - \frac{ab}{1-a-b}XA, \\
&= \frac{1-a}{1-a-b}[(1-b)XC + bXB] - \frac{b}{1-a-b}[aXA + (1-a)XB], \\
&= \frac{1-a}{1-a-b}XD - \frac{b}{1-a-b}XF.
\end{aligned}$$

Esto muestra que los puntos D , E y F están alineados. ■

3.4. El Teorema de Ceva

En esta sección, trataremos el Teorema de Ceva, en el contexto del álgebra geométrica bidimensional, asimismo, se usará el concepto de similaridad directa para su estudio.

Teorema 3.17 *En todo triángulo, cada una de las cevianas interiores concurrentes divide internamente al lado al cual es relativo en dos segmentos, tal que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremo en común, es igual al producto de las longitudes de los otros tres.*

Demostración. Para una demostración ver (Berger, 2009). ■

Escrito usando las herramientas del álgebra geométrica bidimensional:

Teorema 3.18 Dado un triángulo cualquiera A, B, C con vértices en \mathbb{E}^2 , (considerado secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario), los lados AD, BE y $CF \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ con D, E , y F ubicados sobre los lados BC, AC y AB respectivamente; se intersectan en un único punto $O \in \mathbb{E}^2$, si y solo si

$$BDDC^{-1}CEE A^{-1}AFFB^{-1} = 1,$$

siendo BD, DC, CE, EA, AF y $FB \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

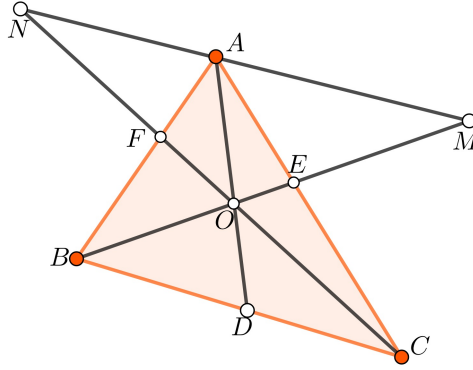


Figura 3.5: Teorema de Ceva

Demostración. Se prolongan los lados BE y CF hasta intersectar la recta que es paralela al lado BC y que pasa a través de A . Se denotan los puntos de intersección por M y N respectivamente. Luego, como el triángulo BDO es directamente similar a MAO y lo mismo ocurre con los triángulos CDO y NAO , se tiene, por la definición 3.2 y por la afirmación anterior:

$$BDDO^{-1} = MA AO^{-1}, \quad (3.4.1)$$

con BD, DO^{-1}, MA y $AO^{-1} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

y

$$DODC^{-1} = AO AN^{-1} \quad (3.4.2)$$

con DC^{-1} y $AN^{-1} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Multiplicando las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2):

$$BDDC^{-1} = MA AN^{-1}. \quad (3.4.3)$$

Análogamente los triángulos MEA y CEB son directamente similares, por la definición 3.3, así como también lo son los triángulos NFA y BFC . En consecuencia, por la definición 3.2:

$$CEE A^{-1} = BC AM^{-1} \quad (3.4.4)$$

con CE, EA^{-1}, BC y $AM^{-1} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

y

$$AFFB^{-1} = NABC^{-1} \quad (3.4.5)$$

con AF, FB^{-1}, NA y $BC^{-1} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Del producto de las ecuaciones (3.4.3), (3.4.4) y (3.4.5) se obtiene:

$$BDDC^{-1}CEEA^{-1}AFFB^{-1} = MA [AN^{-1}BCAM^{-1}] NABC^{-1}.$$

Luego de permutar los vectores agrupados con corchetes,

$$MA [AM^{-1}BCAN^{-1}] NABC^{-1} = (-1)BC(-1)BC^{-1} = +1.$$

$$\therefore BDDC^{-1}CEEA^{-1}AFFB^{-1} = 1.$$

Recíprocamente, sea O el punto de intersección de los lados BE y CF , y sea D' el punto de intersección de la recta AO con el lado BC . Se sabe por hipótesis:

$$BDDC^{-1}CEEA^{-1}AFFB^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow BDDC^{-1} = (CEEA^{-1}AFFB^{-1})^{-1}. \quad (3.4.6)$$

Además, para mostrar la unicidad, vamos a suponer que exista un punto $D' \in \mathbb{E}^2$, para el cual se verifica (3.4.6):

$$BD'D'C^{-1} = (CEEA^{-1}AFFB^{-1})^{-1}. \quad (3.4.7)$$

con BD' y $D'C \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

De las ecuaciones (3.4.6) y (3.4.7):

$$\begin{aligned} BDDC^{-1} &= BD'D'C^{-1} \\ \Rightarrow \frac{BDDC}{\|DC\|^2} &= \frac{BD'D'C}{\|D'C\|^2} \\ \Rightarrow \frac{\|D'B\|\|D'C\|}{\|D'C\|^2} \mathbf{e}^{\mu \angle (D'B, D'C)i} &= \frac{\|DB\|\|DC\|}{\|DC\|^2} \mathbf{e}^{\mu \angle (DB, DC)i} \end{aligned}$$

Desde que $\mu \angle (D'B, D'C) = \mu \angle (DB, DC) = \pi$, se obtiene $\mathbf{e}^{\mu \angle (D'B, D'C)i} = -1$. Por consiguiente, simplificando la ecuación anterior,

$$\frac{\|D'B\|}{\|D'C\|} = \frac{\|DB\|}{\|DC\|} \quad (3.4.8)$$

Considerando los puntos B, D, D' y C consecutivos y colineales, se obtiene de (3.4.8):

$$\frac{\|DB\| \pm \|DD'\|}{\|DC\| \mp \|DD'\|} = \frac{\|DB\|}{\|DC\|}$$

$$\Rightarrow \|BD\|\|DC\| \pm \|DD'\|\|DC\| = \|BD\|\|DC\| \mp \|BD\|\|DD'\|$$

$$\Rightarrow \|DD'\|\|DC\| + \|BD\|\|DD'\| = 0$$

$$\Rightarrow \|DD'\|\|BC\| = 0 \quad \text{siendo } B \neq C$$

$$\Rightarrow \|DD'\| = 0$$

$$\therefore D = D'$$

■

Capítulo 4

Sobre círcunferencias

En este capítulo, se presenta la ecuación cartesiana del círculo en el contexto del álgebra geométrica y algunos temas afines que servirán para abordar el Teorema del Círculo de los Nueve Puntos, también conocido como el Teorema de Feuerbach (Berger, 2009).

4.1. Ecuación algebraica de la circunferencia.

Definición 4.1 Sean $A, B \in \mathbb{E}^2$. La **distancia** entre los puntos A y B , denotado $d(A; B)$ se define así:

$$d(A; B) := \|AB\|$$

Definición 4.2 Un círculo con radio $r > 0$ y centro $F \in \mathbb{E}^2$, denotado $\mathcal{C}(F, r)$, es el lugar geométrico de todos los puntos $P \in \mathbb{E}^2$ ubicados a una distancia r del punto F

$$\mathcal{C}(F, r) := \{P \in \mathbb{E}^2 / d(F, P) = r\}$$

así:

$$d(F, P) := \|FP\| = r \text{ si y solamente si } (FP)^2 = r^2,$$

que puede ser escrita, considerando un punto fijo y arbitrario $X \in \mathbb{E}^2$:

$$(XP - XF)^2 = XP^2 - 2XP.XF + XF^2 = r^2$$

Lo que sigue es un resultado de la geometría euclidiana.

Afirmación 4.3 Siempre existe un único circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.

Demostración. Para una demostración, ver (Barker and Howe, 2007). ■

Usando el álgebra geométrica se presenta de esta manera.

Afirmación 4.4 Dado un punto fijo y arbitrario $X \in \mathbb{E}^2$. Sean $XA, XB, XC \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, vectores linealmente independientes, entonces existe un único punto $O \in \mathbb{E}^2$, llamado **circuncentro** del triángulo con vértices A, B y C .

Demostración. Usar la propiedad 2.17. ■

4.2. Intersección de una recta con una circunferencia.

Las coordenadas de la intersección de una recta con un círculo, son usualmente calculadas por sustitución de la ecuación lineal en la ecuación del círculo, lo que conduce a una ecuación de segundo grado. Se seguirá ahora un camino más algebraico.

Proposición 4.5 Dado un punto fijo y cualquiera $X \in \mathbb{E}^2$. Sean $F \in \mathbb{E}^2$, centro de una circunferencia con radio $r > 0$, ver figura 4.1, R y $R' \in \mathbb{E}^2$ puntos de intersección con una recta que pasa a través de dos puntos P y $Q \in \mathbb{E}^2$ entonces:

$$XR = XP + \mu \left(PF \cdot \mu \pm \sqrt{r^2 + (PF \uparrow \mu)^2} \right)$$

siendo $\mu = \frac{PQ}{\|PQ\|} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

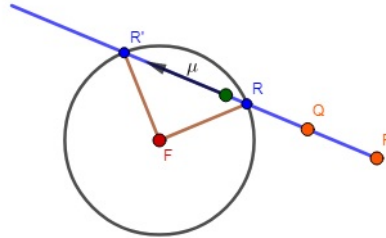


Figura 4.1: Intersección de una recta con una circunferencia

Demostración.

Por hipotesis

$$FR^2 = r^2, \quad (4.2.1)$$

$$XR = XP + kPQ, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{R}. \quad (4.2.2)$$

De la ecuación (4.2.1)

$$(XR - XF)^2 = XR^2 - 2XR.XF + XF^2 = r^2. \quad (4.2.3)$$

La sustitución de (4.2.2) en la segunda igualdad de (4.2.3), resulta:

$$\begin{aligned} & (XP + kPQ)^2 - 2(XP + kPQ).XF + XF^2 = r^2 \\ \Rightarrow & XP^2 + 2kXP.PQ + k^2PQ^2 - 2XP.XF - 2kPQ.XF + XF^2 - r^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Agrupando las potencias de k en (4.2.4),

$$k^2PQ^2 + 2k(XP.PQ - XF.PQ) + XP^2 - 2XF.XP + XF^2 - r^2 = 0. \quad (4.2.5)$$

Escribiendo cada vector libre en (4.2.5) como una diferencia, se llega a:

$$k^2PQ^2 - 2kPF.PQ + PF^2 - r^2 = 0. \quad (4.2.6)$$

La ecuación (4.2.6) tiene solución siempre que la discriminante sea no negativa:

$$4(PF.PQ)^2 - 4PQ^2(PF^2 - r^2) \geq 0. \quad (4.2.7)$$

Introduciendo la identidad $(PF.PQ)^2 - (PF \uparrow PQ)^2 = PQ^2PF^2$ (Hestenes, 2012) en (4.2.7), entonces la discriminante se convierte:

$$4(PF \uparrow PQ)^2 + 4PQ^2r^2 \geq 0 \quad (4.2.8)$$

La solución de la ecuación (4.2.6) para k es:

$$k = PF.PQ^{-1} \pm \sqrt{r^2PQ^{-2} + (PF \uparrow PQ^{-1})^2}. \quad (4.2.9)$$

Cuando $r = \frac{\|PF \uparrow PQ\|}{\|PQ\|}$ en (4.2.8), la recta es tangente al círculo. En este caso, el mayor de los paralelogramos formado por los vectores PF y PQ determina el radio de la circunferencia.

Si $\mu := \frac{PQ}{\|PQ\|}$, denota el vector dirección unitario de la línea PQ y usamos (4.2.9) en (4.2.2), entonces ambos puntos de intersección son:

$$XR = XP + \left(PF.PQ^{-1} \pm \sqrt{r^2PQ^{-2} + (PF \uparrow PQ^{-1})^2} \right) PQ. \quad (4.2.10)$$

Extrayendo μ como factor común de (4.2.10),

$$XR = XP + \mu \left(PF.\mu - \sqrt{r^2 + (PF \uparrow \mu)^2} \right) \quad (4.2.11)$$

y

$$XR' = XP + \mu \left(PF.\mu + \sqrt{r^2 + (PF \uparrow \mu)^2} \right). \quad (4.2.12)$$

■

4.2.1. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia

En geometría elemental, la expresión potencia de un punto se refiere a un resultado que relaciona las longitudes de segmentos de rectas que pasan por dicho punto y cortan a una circunferencia fija.

El concepto geométrico de *potencia* fue introducida por Jakob Steiner en el artículo de 1826 titulado *Einige geometrische Betrachtungen* («Unas cuantas observaciones geométricas»), aunque el teorema al que hace referencia se encuentra ya en Los Elementos de Euclides (Moise, 1990) y (Barker and Howe, 2007).

Los puntos de intersección R y $R' \in \mathbb{E}^2$ encontrados en las ecuaciones (4.2.11) y (4.2.12), cumplen la siguiente propiedad.

Propiedad 4.6 *El producto geométrico de los vectores que van desde un punto $P \in \mathbb{E}^2$ a la intersección R y $R' \in \mathbb{E}^2$ de cualquier línea que pasa a través de P con una circunferencia es constante.*

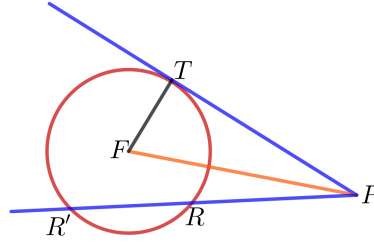


Figura 4.2: Potencia de un punto P con respecto a una circunferencia

Demostración.

De las ecuaciones (4.2.11) y (4.2.12)

$$PRPR' = (PF \cdot \mu)^2 - r^2 - (PF \uparrow \mu)^2. \quad (4.2.13)$$

Usando la identidad algebraica conocida como “diferencia de cuadrados” (Hestenes, 2012) en (4.2.13)

$$(PR)(PR') = (PF)^2 - r^2. \quad (4.2.14)$$

siendo PR, PR' y $PF \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en (4.2.14)

$$PRPR' = PT^2 \quad (4.2.15)$$

donde T es el punto de contacto de la recta tangente que pasa a través de P . ■

Definición 4.7 El producto conseguido en (4.2.15), es independiente de la dirección μ de la recta, y únicamente depende de $P \in \mathbb{E}^2$, llamado potencia del punto P con respecto a la circunferencia dada.

Observación 4.8 Sean P, R y $R' \in \mathbb{E}^2$ puntos alineados y consecutivos.

1. La potencia de un punto puede ser calculado a través de la sustitución de sus coordenadas en la ecuación de la circunferencia. Si su centro es $F = (a, b)$ y $P = (x, y)$ en (4.2.14) entonces,

$$(PF)^2 - r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2. \quad (4.2.16)$$

Usando (4.2.16) en (4.2.14), se obtiene:

$$(PR)(PR') = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$$

con PR y $PR' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

2. La potencia de un punto $P \in \mathbb{E}^2$ con respecto a una circunferencia en los puntos de intersección R y $R' \in \mathbb{E}^2$ pueden ser:
 - a) $(PR)(PR') = 0$ si $P = R$ o $P = R'$.
 - b) $(PR)(PR') > 0$ si $\mu \angle (PR, PR') = 0$.
 - c) $(PR)(PR') < 0$ si $\mu \angle (PR, PR') = \pm\pi$.

4.3. Ecuación polar

Queremos describir la distancia de un punto $P \in \mathbb{E}^2$ a los puntos R y $R' \in \mathbb{E}^2$ sobre la circunferencia como una función del ángulo α entre la línea PR y el diámetro, ver figura 4.3.

Ahora bien, de la proposición 4.5, se sabe que los vectores PR y PR' son:

$$PR = \mu \left(PF \cdot \mu - \sqrt{r^2 + (PF \uparrow \mu)^2} \right)$$

y

$$PR' = \mu \left(PF \cdot \mu + \sqrt{r^2 + (PF \uparrow \mu)^2} \right) \quad (4.3.1)$$

Llegamos a la ecuación polar tomando la norma en (4.3.1), que es la distancia a la circunferencia:

$$\|PR\| = \left| \|PF\| \cos \alpha - \sqrt{r^2 - (PF)^2 \sin^2 \alpha} \right|$$

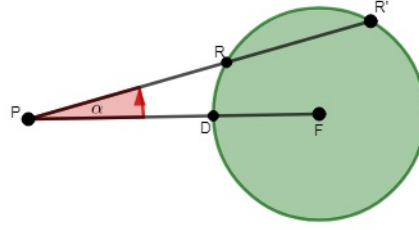


Figura 4.3: Ecuación polar

y

$$\|PR'\| = \left| \|PF\| \cos \alpha + \sqrt{r^2 - (PF)^2 \sin^2 \alpha} \right| \quad (4.3.2)$$

Afirmación 4.9 Si P y $R' \in \mathbb{E}^2$ son puntos de la circunferencia, entonces $\|PF\| = r$ y $\|PR'\| = 2r \cos \alpha$.

Demostración. Dada una circunferencia de centro F y radio $r > 0$, se cumple $\|PF\| = r$ y usando la ecuación (4.3.2)

$$\begin{aligned} \|PR'\| &= \left| r \cos \alpha + \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \right| \\ &= r \cos \alpha + r \cos \alpha = 2r \cos \alpha. \end{aligned}$$

■

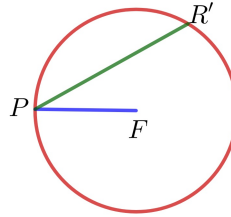


Figura 4.4: Ecuación polar para un punto de la circunferencia

4.3.1. Inversión con respecto a una circunferencia

Definición 4.10 Decimos que $P' \in \mathbb{E}^2$ es punto de inversión de $P \in \mathbb{E}^2$ con respecto a una circunferencia de centro $F \in \mathbb{E}^2$ y radio $r > 0$, si el vector $FP' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ es el vector

inverso de $FP \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ con radio $r > 0$,

$$FP' = r^2 FP^{-1} \text{ si y solamente si } (FP)(FP') = r^2 \quad (4.3.3)$$

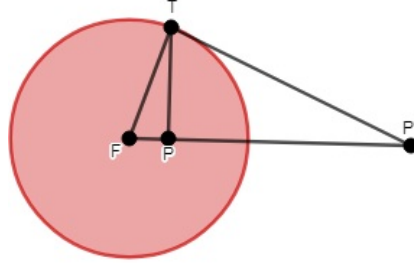


Figura 4.5: Inversión con respecto a una circunferencia

A partir de esta definición, podemos hacer las siguientes observaciones:

- Observación 4.11**
1. Los puntos P y $P' \in \mathbb{E}^2$ están alineados con el centro $F \in \mathbb{E}^2$ y están ubicados en un mismo lado de F , esto es, $(FP)(FP') \geq 0$ siempre que $FP \uparrow FP' = 0$.
 2. La circunferencia de centro F y radio k es llamada circunferencia de inversión porque sus puntos permanecen invariantes, bajo esta inversión.
 3. La inversión transforma puntos ubicados dentro del círculo de inversión en puntos externos y recíprocamente.

Construcción. Para obtener geoméricamente la inversa de un punto interior $P \in \mathbb{E}^2$, se dibuja el diámetro que pasa a través de P , ver figura 4.5; después de esto, se dibuja la perpendicular a este diámetro desde P , el cual cortará al círculo en el punto $T \in \mathbb{E}^2$, finalmente se dibuja la tangente con punto de contacto T . La intersección $P' \in \mathbb{E}^2$, de esta tangente con la prolongación del diámetro es el punto de inversión P .

Observación 4.12 Note en la figura 4.5, que los triángulos FPT y FTP' (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) son opuestamente similares, desde que,

$$(FP)(FT)^{-1} = (FP')^{-1}(FT) \Rightarrow (FP')(FP) = (FT)^2 = k^2$$

donde FT, FP y $FP' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Proposición 4.13 Si el punto $P' \in \mathbb{E}^2$ es el punto de inversión de $P \in \mathbb{E}^2$ con respecto a una circunferencia de centro $F \in \mathbb{E}^2$ y radio $k > 0$, entonces:

1. $\|FP\| < k \Rightarrow \|FP'\| > k$
2. $\|FP\| > k \Rightarrow \|FP'\| < k$
3. $\|FP\| = k \Rightarrow \|FP'\| = k$, esto es $P = P'$.

Demostración.

Para probar el ítem 1, supongamos por hipótesis:

$$\|FP\| < k \quad (4.3.4)$$

Usando la definición 4.10 en (4.3.4) para el punto $P \in \mathbb{E}^2$:

$$FP' = k^2(FP)^{-1} \quad (4.3.5)$$

Usando la ecuación (4.3.4) y aplicando la norma a la ecuación (4.3.5):

$$\begin{aligned} \|FP'\| &= \frac{k^2}{\|FP\|} > \frac{k^2}{k} = k \\ &\Rightarrow \|FP'\| > k \end{aligned}$$

Análogamente, se muestra el ítem 2 y el ítem 3. ■

Afirmación 4.14 Dada una circunferencia de centro $F \in \mathbb{E}^2$ y radio $k > 0$. Sea $P \in \mathbb{E}^2$ un punto de la circunferencia,

1. Si $\|FP\| < k$ entonces $(FP)(FP') = k^2$
2. Si $\|FP\| > k$ entonces $(FP)(FP') = k^2$

con FP y $FP' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Demostración. Si $P \in \mathbb{E}^2$ es un punto de la circunferencia, entonces por el ítem 3 de la proposición 4.13 se tiene que; $\|FP\| = k$ ya que el triángulo FPT es similarmente opuesto al triángulo FTP' (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos los triángulos en el sentido antihorario), entonces por la definición 3.8:

$$(FP)(FT)^{-1} = (FP')^{-1}(FT) \quad (4.3.6)$$

Multiplicando el lado izquierdo por FP' y el lado derecho por FT en la ecuación (4.3.6):

$$(FP')(FP) = (FT)^2 = k^2$$

Análogamente se muestra el ítem 2. ■

Construcción

Para obtener la inversa de un punto exterior, se hace la misma construcción pero en el sentido opuesto. Se dibuja la tangente a la circunferencia que pasa a través del punto $P' \in \mathbb{E}^2$ y luego se dibuja la perpendicular al diámetro $FP' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ que pasa a través del punto de contacto $T \in \mathbb{E}^2$ de la tangente. La intersección $P \in \mathbb{E}^2$ de la perpendicular con el diámetro es el punto inverso buscado P' , véase la figura 4.5.

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de la afirmación 4.14.

Proposición 4.15 *Cualquier recta no conteniendo el centro de inversión es transformada en una circunferencia que pasa a través del centro y recíprocamente.*

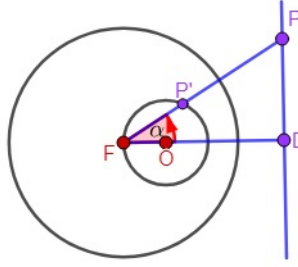


Figura 4.6: Transformación a través de una circunferencia de inversión de centro F

Demostración. Para probar que la condición es necesaria y suficiente, consideremos una circunferencia de inversión de centro $F \in \mathbb{E}^2$ y radio k , consideremos los puntos de inversión P y $P' \in \mathbb{E}^2$ con $\|FP\| > k$ y tomemos la ecuación polar de una recta con dirección $FD \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$:

$$\|FP\| = \frac{d}{\cos \alpha} \quad (4.3.7)$$

donde $d = \|FD\|$ y $\alpha = \mu\angle(FD, FP)$

Usando la definición de inversión de un punto $P \in \mathbb{E}^2$, con respecto a una circunferencia de centro F y luego de aplicar la norma euclidiana resulta,

$$\begin{aligned} (FP')(FP) &= k^2 \\ \Rightarrow \|FP'\| &= \frac{k^2}{\|FP\|} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

con FP y $FP' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Reemplazando, lo obtenido de (4.3.7) en la ecuación (4.3.8),

$$\|FP'\| = \frac{k^2}{\|FP\|} = \frac{k^2 \cos \alpha}{d}$$

Esta es la ecuación polar de una circunferencia que pasa a través de F y con diámetro $\frac{k^2}{d}$. Por tanto el centro $O \in \mathbb{E}^2$ de la circunferencia se encuentra en FD . ■

La siguiente afirmación muestra una propiedad de inversión con respecto a una circunferencia.

Afirmación 4.16 *Una inversión transforma una circunferencia que no pasa a través de su centro, en otra circunferencia que también no pasa a través de su centro.*

Demostración. Consideremos una circunferencia de centro $F \in \mathbb{E}^2$ y radio r que será transformado bajo una inversión de centro $P \in \mathbb{E}^2$ y radio k . Cualquier punto $R \in \mathbb{E}^2$ en la circunferencia se mapea en otro punto $S \in \mathbb{E}^2$, según (4.3.2):

$$\|PS\| = \frac{k^2}{\|PR\|} = \frac{k^2}{\|PF\| \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - PF^2 \sin^2 \alpha}} \quad (4.3.9)$$

Multiplicando por la conjugada del denominador, ver (Hestenes, 2012), en (4.3.9):

$$\|PS\| = \frac{k^2(\|PF\| \cos \alpha \mp \sqrt{r^2 - PF^2 \sin^2 \alpha})}{PF^2 - r^2}$$

esto es, la ecuación polar de un círculo con centro G y radio s :

$$\|PS\| = \|PG\| \cos \alpha \mp \sqrt{s^2 - PG^2 \sin^2 \alpha} \quad (4.3.10)$$

$$\text{donde } \|PG\| = \frac{k^2 \|PF\|}{PF^2 - r^2} = \frac{k^2 \|PF\|}{PT^2} \quad s = \frac{k^2 r}{PF^2 - r^2} = \frac{k^2 r}{PT^2}$$

con PF, PR, PS, PT y $PG \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$. ■

De los resultados anteriores se puede observar lo siguiente,

Observación 4.17 1. $PF^2 - r^2 = PT^2$ es la potencia del punto $P \in \mathbb{E}^2$, con respecto a la circunferencia de centro $F \in \mathbb{E}^2$. Entonces vemos que las distancias del centro de inversión al centro de las circunferencias y los radios de estas circunferencias cambian en la razón de los cuadrados de los radios de inversión divididos por la potencia del centro de inversión con respecto a la circunferencia dada.

2. Para calcular la potencia del centro de inversión P , con respecto a la nueva circunferencia, debemos hacer los siguientes cálculos,

$$PU^2 = PG^2 - s^2 = \frac{k^4(PF^2 - r^2)}{PT^4} = \frac{k^4}{PT^2}$$

Esto es, el producto de las potencias del centro de inversión con respecto a cualquier circunferencia y su transformada es constante e igual a la cuarta potencia del radio de inversión:

$$PT^2 PU^2 = k^4$$

con PU y $PT \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

3. En la ecuación de la circunferencia transformado (4.3.10) el símbolo \mp aparece en lugar de \pm . Esto significa que el sentido del arco de R a R' es opuesto al sentido del arco de S a S' con puntos en \mathbb{E}^2 .

4.4. La circunferencia de los nueve puntos

En 1822, Karl Feuerbach descubrió una de las propiedades más profundas sobre la circunferencia que lleva su nombre: la circunferencia de los nueve puntos es tangente exterior a los círculos exinscritos al triángulo. La circunferencia inscrita al triángulo es tangente interior a la circunferencia de Feuerbach. Ahora mostraremos la versión euclidiana de este enunciado (Berger, 2009).

Propiedad 4.18 Sea $\triangle ABC$ un triángulo con ortocentro O_c .

El circuncírculo \mathcal{C} del triángulo medio $\triangle A'B'C'$ contiene todos los puntos

$$A', B', C' \quad P, Q, R \quad \widetilde{A'}, \widetilde{B'}, \widetilde{C'}.$$

A', B', C' son los puntos medios de los lados del $\triangle ABC$.

P, Q, R son los pies de las alturas desde A, B, C .

$\widetilde{A'}, \widetilde{B'}, \widetilde{C'}$ son los puntos de Euler, los puntos medio de $\overline{AO_c}, \overline{BO_c}, \overline{CO_c}$.

1. El triángulo de Euler $\triangle \widetilde{A'}\widetilde{B'}\widetilde{C'}$ es obtenido del triángulo medio $\triangle A'B'C'$ por rotación de 180° alrededor de C'_c , el circuncentro del triángulo medio.
2. Los cuadriláteros $\square A'B'\widetilde{A'}\widetilde{B'}$, $\square B'C'\widetilde{B'}\widetilde{C'}$, $\square C'A'\widetilde{C'}\widetilde{A'}$ son rectángulos inscritos en el círculo \mathcal{C} .

Demostración. Para una demostración ver (Barker and Howe, 2007). ■

Este enunciado puede ser escrito en el contexto del álgebra geométrica bidimensional

Teorema 4.19 *Los puntos medios de los lados de cualquier triángulo, el pie de las alturas y los puntos medios de cada vértice al ortocentro se encuentran en una circunferencia, llamada la circunferencia de los nueve puntos.*

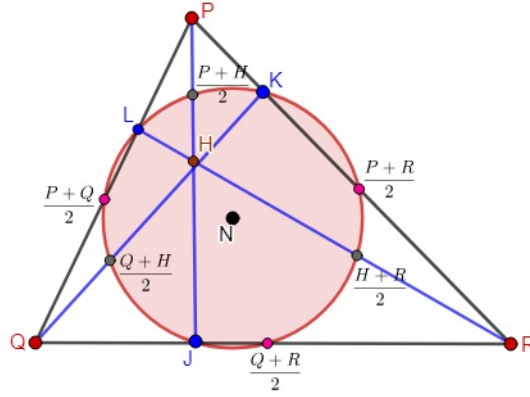


Figura 4.7: La circunferencia de los nueve puntos

Demostración. Consideremos un punto fijo y arbitrario $X \in \mathbb{E}^2$. Dado cualquier triángulo PQR con vértices en \mathbb{E}^2 (considerado secuencialmente de tal modo que recorremos el triángulo en el sentido antihorario) cuyo ortocentro es $H \in \mathbb{E}^2$. Usando la identidad de Legendre, ver (Hestenes, 2012) y la afirmación 4.14, se cumple:

$$(HP + RQ)^2 - (HP - RQ)^2 = 4HP.RQ \quad (4.4.1)$$

con HP y $RP \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Escribiendo cada vector libre en (4.4.1) como una diferencia de vectores y teniendo en cuenta que el vector PH situado en la altura que pasa por P es perpendicular a la base QR , se sigue:

$$(XP - XH + XQ - XR)^2 - (XP - XH - XQ + XR)^2 = 4(XP - XH).(XQ - XR) = 0 \quad (4.4.2)$$

Análogamente, se consigue:

$$(XP - XH + XQ - XR)^2 - (XP + XH - XQ - XR)^2 = 4(XQ - XH).(XP - XR) = 0 \quad (4.4.3)$$

y

$$(XP + XH - XQ - XR)^2 - (XP - XH - XQ + XR)^2 = 4(XR - XH).(XQ - XP) = 0 \quad (4.4.4)$$

Por lo tanto de las ecuaciones (4.4.2), (4.4.3) y (4.4.4), se obtiene:

$$(XP + XQ - XR - XH)^2 = (XP - XQ + XR - XH)^2 = (XP - XQ - XR + XH)^2 \quad (4.4.5)$$

y ya que el signo puede ser opuesto dentro del paréntesis en (4.4.5):

$$\begin{aligned} (XP + XQ - XR - XH)^2 &= (XP - XQ + XR - XH)^2 = (XP - XQ - XR + XH)^2 \\ &= (-XP - XQ + XR + XH)^2 = (-XP + XQ - XR + XH)^2 = (-XP + XQ + XR - XH)^2 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Sea $N \in \mathbb{E}^2$ tal que $XN := \frac{XP + XQ + XR + XH}{4} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ en (4.4.6):

$$\begin{aligned} \left(XN - \frac{XR + XH}{2}\right)^2 &= \left(XN - \frac{XQ + XH}{2}\right)^2 = \left(XN - \frac{XQ + XR}{2}\right)^2 \\ &= \left(XN - \frac{XP + XQ}{2}\right)^2 = \left(XN - \frac{XP + XR}{2}\right)^2 = \left(XN - \frac{XP + XH}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Esto es, N es el centro de una circunferencia, ver figura 4.7, que pasa a través de los tres puntos medios $A := \frac{P+Q}{2}$, $B := \frac{Q+R}{2}$ y $C := \frac{P+R}{2} \in \mathbb{E}^2$ de los lados PQ , QR , PR y los tres puntos medios $D := \frac{P+H}{2}$, $E := \frac{Q+H}{2}$ y $F := \frac{R+H}{2} \in \mathbb{E}^2$, de los segmentos que tienen por extremos los vértices y el ortocentro.

Desde que podemos escribir XN , como:

$$XN = \frac{1}{2} \left(\frac{XP + XH}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{XQ + XR}{2} \right)$$

se sigue que $\frac{P+H}{2}$ y $\frac{Q+R}{2} \in \mathbb{E}^2$, son extremos opuestos del mismo diámetro. Desde que J es pie de la altura trazada desde P , los vectores $XJ - \frac{XP + XH}{2}$ y $XJ - \frac{XQ + XR}{2}$ son ortogonales y cumplen:

$$\left(XJ - \frac{XP + XH}{2}\right) \cdot \left(XJ - \frac{XQ + XR}{2}\right) = 0 \quad (4.4.7)$$

siendo $XD := \frac{XP + XH}{2}$ y $XQ := \frac{XR + XH}{2}$. Esto significa que los lados de un ángulo recto que interceptan una semicircunferencia de la circunferencia de los nueve puntos. Por lo tanto, este ángulo esta inscrito y su vértice J , también se encuentra en la circunferencia de los nueve puntos. Además, podemos pasar a la forma algebraica para llegar a la misma conclusión, desarrollando el producto interno en (4.4.7):

$$XJ^2 - XJ \cdot \frac{XQ + XR}{2} - \frac{XP + XH}{2} \cdot XJ + \frac{XP + XH}{2} \cdot \frac{XQ + XR}{2} = 0. \quad (4.4.8)$$

Introduciendo el centro N de la circunferencia de los nueve puntos en (4.4.8):

$$XJ^2 - 2XJ.XN + 2XN.\frac{XQ + XR}{2} - \left(\frac{XQ + XR}{2}\right)^2 = 0 \quad (4.4.9)$$

y después de sumar y restar XN^2 en (4.4.9) se consigue:

$$(XJ - XN)^2 - \left(\frac{XQ + XR}{2} - XN\right)^2 = 0$$

lo que muestra que la longitud de JN , es el radio de la circunferencia de los nueve puntos.

■

Ahora podemos afirmar la siguiente proposición, sobre distancias relativas entre los puntos notables.

Afirmación 4.20 *Dado un punto fijo y cualquiera $X \in \mathbb{E}^2$. Sean G , H , O y $N \in \mathbb{E}^2$ respectivamente el centroide, ortocentro, circuncentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos entonces,*

$$XN = \frac{3XG + XH}{4}$$

$$= ((XP)(QR)(XP) + (XQ)(RP)(XQ) + (XR)(PQ)(XR)) (4PQ \uparrow QR)^{-1}$$

con $P, Q, R \in \mathbb{E}^2$ y $QR, RP, PQ \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Demostración. Considérese el punto N tal que $XN := \frac{XP + XQ + XR + XH}{4}$, teniendo en cuenta que $XG := \frac{XP + XQ + XR}{3}$, se obtiene,

$$XN = \frac{3XG + XH}{4}. \quad (4.4.10)$$

Usando (2.3.6) y después de reemplazarlo en (4.4.10),

$$XN = \frac{XO + XH}{2}. \quad (4.4.11)$$

Usando las ecuaciones (2.1.30) y (2.2.10) en (4.4.11):

$$\begin{aligned} XN &= \frac{1}{2}(XP(XP.QR) + XQ(XQ.RP) + XR(XR.PQ))(RQ \uparrow RP)^{-1} \\ &\quad - (XP^2QR + XQ^2RP + XR^2PQ)(2QR \uparrow QP)^{-1} \\ \Rightarrow XN &= (XP(QR)XP + XQ(RP)XQ + XR(PQ)XR) (4QR \uparrow QP)^{-1} \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

■

Por lo tanto, el punto N también se encuentra en la recta de Euler y la distancia relativa entre el circuncentro O , el centroide G , el centro N de la circunferencia de los nueve puntos y el ortocentro H se muestran en la figura 4.8.

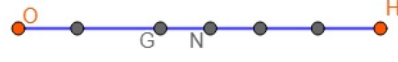


Figura 4.8: Distancias relativas entre los puntos notables

4.5. Sobre el ángulo orientado inscrito en una circunferencia

En esta sección, mostraremos un resultado de la geometría euclídea.

Teorema 4.21 *La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad del arco correspondiente.*

Demostración. Para una demostración ver (Barker and Howe, 2007). ■

Usaremos el Álgebra Geométrica Afin para dar una demostración algebraica del teorema 4.21.

Teorema 4.22 *Dada la ecuación de la circunferencia de centro $O \in \mathbb{E}^2$ fijo,*

$$\mathcal{C}(O, r) := \{X \in \mathbb{E}^2; \|OX\| = r\}$$

y los puntos distintos A , B y $X \in \mathcal{C}(O, r)$ se cumple:

$$\mu\angle(OB, OA) = \frac{\mu\angle(XA, XB)}{2},$$

donde XA, XB, OA y $OB \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

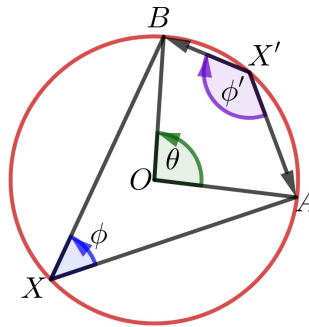


Figura 4.9: Ángulo inscrito en una circunferencia

Demostración. Dado un punto fijo y arbitrario $X \in \mathbb{E}^2$. Sean los vectores OA y $OB \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, por la afirmación 1.5.4:

$$OA^{-1}OB = \frac{\|OB\|}{\|OA\|} \mathfrak{e}^{\theta i}$$

siendo $\|OA\| = \|OB\| = r$

$$\Rightarrow OA^{-1}OB = \mathfrak{e}^{\theta i} \quad (4.5.1)$$

siendo $\theta := \mu\angle(OA, OB) \in] - \pi, \pi]$.

Podemos definir el ángulo orientado ϕ por la ecuación

$$(YA - YX)^{-1}(YB - YX) = \lambda \mathfrak{e}^{\phi i}$$

con $\lambda = \frac{\|XB\|}{\|XA\|}$ y $\phi := \mu\angle(XA, XB) \in] - \pi, \pi]$

Escribiendo por conveniencia, $OA^{-1}OX = \mathfrak{e}^{\alpha i}$, con $\alpha := \mu\angle(OA, OX) \in] - \pi, \pi]$; observamos que

$$OA^{-1}(OB - OX) = \mathfrak{e}^{\theta i} - \mathfrak{e}^{\alpha i}$$

y

$$(OA - OX)^{-1}OA = (OA^{-1}(OA - OX))^{-1} = (1 - \mathfrak{e}^{\alpha i})^{-1}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (OA - OX)^{-1}(OB - OX) &= (OA - OX)^{-1}OA OA^{-1}(OB - OX) \\ &= \frac{\mathfrak{e}^{\theta i} - \mathfrak{e}^{\alpha i}}{1 - \mathfrak{e}^{\alpha i}} \end{aligned}$$

Insertando esto en (4.5.1), obtenemos

$$\frac{\mathfrak{e}^{\theta i} - \mathfrak{e}^{\alpha i}}{1 - \mathfrak{e}^{\alpha i}} = \lambda \mathfrak{e}^{\phi i}$$

Podemos eliminar λ dividiendo esta ecuación por su conjugada, encontramos que α desaparece; por tanto,

$$\mathfrak{e}^{2\phi i} = \frac{\mathfrak{e}^{\theta i} - \mathfrak{e}^{\alpha i}}{1 - \mathfrak{e}^{\alpha i}} \frac{1 - \mathfrak{e}^{-\alpha i}}{\mathfrak{e}^{\theta i} - \mathfrak{e}^{\alpha i}} = \mathfrak{e}^{\theta i}.$$

Para resolver ϕ debemos considerar las dos raíces cuadradas

$$\mathfrak{e}^{\phi i} = \pm \mathfrak{e}^{\frac{\theta}{2} i}$$

Da dos valores diferentes para ϕ , los cuales denotamos por ϕ y ϕ' respectivamente.

La raíz positiva da $\phi = \frac{1}{2}\theta$, como se afirmó antes. Desde que este resultado es independiente de α , se cumple para cualquier punto X de la circunferencia fuera del arco. Pero podemos deducir mas. La raíz negativa da $\phi' = \frac{1}{2}\theta - \pi$ si $\theta > 0$ y $\phi' = \frac{1}{2}\theta + \pi$ si $\theta < 0$. Esta

relación se cumple para cualquier punto X' sobre el arco dado de la circunferencia, como se indica en la figura 4.9. Los ángulos para los dos casos están obviamente relacionados por $\phi' = \phi \pm \pi$, o equivalentemente por

$$\mathbf{e}^{\phi'i} = \pm \mathbf{e}^{\phi i}.$$

De esto podemos concluir que (4.5.1) aplicado con ϕ fijado para todos los puntos sobre la circunferencia si el parametro λ está permitido tomar valores negativos. ■

4.6. Cuadriláteros cíclicos y circunscritos

En esta sección revisaremos varios de los resultados más importantes acerca de cuadriláteros orientados cíclicos y ángulos orientados en la circunferencia. Algunos de los teoremas y sus demostraciones que presentamos aquí son: el Teorema de Ptolomeo, la fórmula de Brahmagupta para el cálculo del área orientada entre otros.

Afirmación 4.23 *El área de un cuadrilátero con vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 (considerado secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario), es la mitad del producto exterior de las diagonales, es decir*

$$S_{ABCD} := \frac{1}{2} CA \uparrow DB.$$

con CA y $DB \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Demostración. Podemos dividir el cuadrilátero orientado en dos triángulos

$$S_{ABCD} := \frac{1}{2} CA \uparrow CB + \frac{1}{2} CD \uparrow CA. \quad (4.6.1)$$

Extrayendo el factor común y usando la antisimetría del producto exterior en (4.6.1):

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (CA \uparrow CB - CA \uparrow CD) \quad (4.6.2)$$

Usando la linealidad del producto exterior en (4.6.2):

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} CA \uparrow (CB - CD). \\ \Rightarrow S_{ABCD} &= \frac{1}{2} CA \uparrow DB. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

■

Definición 4.24 Los cuadriláteros orientados inscritos en una circunferencia son llamados cuadriláteros orientados cíclicos.

Definición 4.25 (Razón Doble)

Dados A, B, C y $D \in \mathbb{E}^2$, definimos la razón doble,

$$(ABCD) := ACAD^{-1}BDBC^{-1}.$$

Afirmación 4.26 Si $(ABCD) = r$ entonces $(DABC) = \frac{r}{r-1}$.

Demostración. Por definición, $(ABCD) := ACAD^{-1}BDBC^{-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{r}{r-1} &= \frac{ACAD^{-1}BDBC^{-1}BC}{ACAD^{-1}BDBC^{-1}BC - ADAD^{-1}BCBC^{-1}BC} = \\ &= \frac{ACAD^{-1}BD}{ACAD^{-1}BD - ADAD^{-1}BC} = \frac{ACAD^{-1}BDAB^{-1}}{ACAD^{-1}BDAB^{-1} - ADAD^{-1}BCAB^{-1}} \\ &= \frac{BDAB^{-1}ACAD^{-1}}{BDAB^{-1}ACAD^{-1} - ADAD^{-1}BCAB^{-1}} \\ &= \frac{BDAB^{-1}ACAD^{-1}ADDC^{-1}}{BDAB^{-1}ACAD^{-1}ADDC^{-1} - ADAD^{-1}BCAB^{-1}ADDC^{-1}} = \\ &= \frac{BDDC^{-1}ACAB^{-1}}{BDDC^{-1}ACAB^{-1} - BCAB^{-1}ADDC^{-1}} = \frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-DBDC^{-1}ACAB^{-1} - BCAB^{-1}ADDC^{-1}} \\ &= \frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-(DBAB^{-1}ACDC^{-1} - BCAB^{-1}DADC^{-1})} \\ &= \frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-((DC + CB)AB^{-1}ACDC^{-1} - BCAB^{-1}(DC + CA)DC^{-1})}, \end{aligned}$$

luego de multiplicar y permutar términos se sigue,

$$= \frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-(ACAB^{-1} + CBAB^{-1}ACDC^{-1} - BCAB^{-1} - BCAB^{-1}CADC^{-1})}$$

cancelando el segundo y cuarto término del denominador, resulta

$$\frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-(ACAB^{-1} - BCAB^{-1})} = \frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-(AC + CB)AB^{-1}} = \frac{-DBDC^{-1}ACAB^{-1}}{-ABAB^{-1}} = (DABC).$$

■

Teorema 4.27 En todo cuadrilátero orientado inscriptible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

Demostración. Para una demostración ver (Barker and Howe, 2007). ■

Ahora escribiremos el Teorema de Ptolomeo en el contexto del álgebra geométrica.

Afirmación 4.28 (Teorema de Ptolomeo) . Dado un cuadrilátero cíclico con vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario), el producto de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos, ver figura 4.10.

$$\|AC\| \|BD\| = \|AB\| \|CD\| + \|BC\| \|DA\|$$

con AC, BD, AB, CD, BC y $DA \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

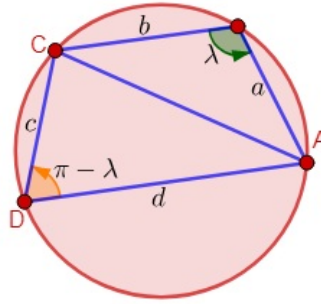


Figura 4.10: Teorema de Ptolomeo

Demostración. Usando la afirmación 4.26,

$$(DABC) = \frac{(ABCD)}{(ABCD) - 1}$$

se sigue

$$\frac{\|DB\| \|AC\|}{\|DC\| \|AB\|} = \frac{\|AC\| \|BD\|}{\|AC\| \|BD\| - \|AD\| \|BC\|}$$

luego

$$\begin{aligned} \|AC\| \|BD\| - \|AD\| \|BC\| &= \|DC\| \|AB\| \\ \therefore \|AC\| \|BD\| &= \|AD\| \|BC\| + \|DC\| \|AB\|. \end{aligned}$$

■

Afirmación 4.29 Para cualquier cuadrilátero cíclico con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario), la suma de los ángulos orientados en sentido antihorario y opuestos es π .

Demostración. Dado un cuadrilátero cíclico de vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 , inscrito en una circunferencia de centro O y radio $r > 0$, se cumple por definición de ángulo central, ver (Barker and Howe, 2007),

$$\mu\angle(OB, OD) + \mu\angle(OD, OB) = 2\pi$$

luego por el teorema 4.9

$$\mu\angle(AB, AD) + \mu\angle(CD, CB) = \pi.$$

■

La fórmula de Brahmagupta (llamada así en honor al matemático indio Brahmagupta, quien la utilizó por primera vez) permite encontrar el área de cualquier cuadrilátero dadas las longitudes de los lados y algunos de los ángulos. En su formulación más común, proporciona el área de los cuadriláteros cíclicos (Moise, 1990).

Proposición 4.30 *El área de la región limitada por un cuadrilátero inscrito o inscriptible, en función de las longitudes de los lados a, b, c y d y del semiperímetro p , se puede calcular con la siguiente fórmula notable:*

$$\mathbb{A}_{\square ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

donde $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Demostración. Ver (Berger, 2009). ■

Ahora este mismo enunciado para calcular áreas de cuadriláteros cíclicos, en el lenguaje del álgebra geométrica bidimensional:

Proposición 4.31 (Fórmula de Brahmagupta para el Área) *Dado cualquier cuadrilátero cíclico con vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario) y lados $\|AB\| = a$, $\|BC\| = b$, $\|CD\| = c$ y $\|DA\| = d$ y semiperímetro $s := \frac{a+b+c+d}{2}$, se cumple:*

$$S_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

con AB, BC, CD y $DA \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Demostración. Aplicando la ley de cosenos, ver (Hestenes, 2012), a los triángulos con vértices A, B, C y A, C, D en \mathbb{E}^2 , (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos los triángulos en el sentido antihorario), resulta:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \mu\angle(BC, BA) \quad (4.6.4)$$

y

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \mu \angle (BC, BA)) \quad (4.6.5)$$

con AC, BC y $BA \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Igualando las ecuaciones (4.6.4) y (4.6.5) y teniendo en cuenta que el coseno de ángulos suplementarios tienen signos opuestos, ver (Calvet, 2007), resulta:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \mu \angle (BC, BA) &= c^2 + d^2 + 2cd \cos \mu \angle (BC, BA) \\ \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 &= 2(ab + cd) \cos \mu \angle (BC, BA). \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Dado que $ab + cd > 0$, se puede despejar el coseno en (4.6.6):

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \cos \mu \angle (BC, BA). \quad (4.6.7)$$

El área del cuadrilátero es la suma de las áreas orientadas de los triángulos ABC y CDA :

$$S_{ABCD} = \frac{ab}{2} \sin \mu \angle (BC, BA) + \frac{cd}{2} \sin(\pi - \mu \angle (BC, BA)). \quad (4.6.8)$$

Los senos que aparecen en (4.6.8) son iguales, ver (Calvet, 2007), luego;

$$S_{ABCD} = \frac{(ab + cd)}{2} \sin \mu \angle (BC, BA). \quad (4.6.9)$$

Elevando al cuadrado (4.6.9), para escribir el seno en función del coseno y usando (4.6.7):

$$\begin{aligned} S_{ABCD}^2 &= \frac{(ab + cd)^2}{4} \left(1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} \right) \\ \Rightarrow S_{ABCD}^2 &= \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{16} \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Extrayendo la raíz cuadrada en (4.6.10) e introduciendo s resulta:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

■

Definición 4.32 *Todo cuadrilátero con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario), donde una circunferencia puede ser inscrito, es llamado cuadrilátero circunscrito.*

Observación 4.33 1. *Para estos cuadriláteros, las bisectrices se encuentran en un único punto, centro del círculo inscrito.*

2. Al trazar los radios que van a los puntos de tangencia, el cuadrilátero es dividido en pares de triángulos opuestos, ver figura 4.11, y por lo tanto se deduce que la suma de longitudes de lados opuestos son iguales.

Proposición 4.34 Dado un cuadrilátero circunscrito con vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido anti-horario)

$$\|AB\| + \|CD\| = \|BC\| + \|DA\| \quad (4.6.11)$$

con AB, CD, BC y $DA \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Demostración.

Consideremos los puntos de tangencia T, U, V y $W \in \mathbb{E}^2$, respectivamente, de los lados AB, BC, CD y DA , como se ve en la figura 4.11. Usando la afirmación 2.20 resulta:

$$\|BU\| = \|BT\|, \quad \|CU\| = \|CV\|, \quad \|DV\| = \|DW\| \quad \text{y} \quad \|AT\| = \|AW\| \quad (4.6.12)$$

donde $BU, BT, CU, CV, DV, DW, AT$ y $AW \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

De la figura 4.11:

$$\|AB\| + \|CD\| = (\|AT\| + \|TB\|) + (\|CV\| + \|VD\|)$$

siendo AB, CD, AT, TB, CV y $VD \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Usando las igualdades mencionadas en (4.6.12):

$$\|AT\| + \|TB\| + (\|CV\| + \|VD\|) = (\|AW\| + \|BU\|) + (\|CU\| + \|DW\|). \quad (4.6.13)$$

Agrupando los términos del lado derecho de (4.6.13) de manera conveniente y sumando los vectores alineados:

$$\|AB\| + \|CD\| = (\|AW\| + \|DW\|) + (\|BU\| + \|CU\|) = \|DA\| + \|BC\|.$$

■

Proposición 4.35 Si un cuadrilátero $ABCD$ con vértices en \mathbb{E}^2 (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario), tiene un círculo circunscrito, entonces:

$$|S_{ABCD}| = \sqrt{\|AB\| \|BC\| \|CD\| \|DA\|}$$

con AB, BC, CD y $DA \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Demostración. Dado un cuadrilátero cíclico de vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 con $\|AB\| = a, \|BC\| = b, \|CD\| = c$ y $\|DA\| = d$, se cumple por la proposición 4.31,

$$S_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

siendo $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

y por la afirmación 4.34,

$$\|AB\| + \|CD\| = \|AD\| + \|BC\|.$$

Usando estos resultados se obtiene:

$$s - a = \|CD\|, \quad s - b = \|DA\|, \quad s - c = \|AB\|$$

y

$$s - d = \|BC\|.$$

Reemplazandolo en la fórmula de Brahmagupta, resulta

$$|S_{ABCD}| = \sqrt{\|AB\|\|BC\|\|CD\|\|DA\|}.$$

■

Proposición 4.36 *Dado cualquier cuadrilátero circunscriptible con vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 , (considerado secuencialmente de tal modo que recorremos el polígono en el sentido antihorario) a una circunferencia de centro I . Sean T, U, V y $W \in \mathbb{E}^2$ puntos de tangencia, respectivamente de los lados AB, BC, CD y $DA \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, entonces:*

$$1. \mu\angle(AB, AD) \equiv \mu\angle(AT, AW) = \pi - \mu\angle(IW, IT).$$

$$2. \mu\angle(BC, BA) \equiv \mu\angle(BU, BT) = \pi - \mu\angle(IT, IU).$$

$$3. \mu\angle(CD, CB) \equiv \mu\angle(CV, CU) = \pi - \mu\angle(IU, IV).$$

$$4. \mu\angle(DA, DC) \equiv \mu\angle(DW, DV) = \pi - \mu\angle(IV, IW).$$

con $AD, AB, AW, AT, IW, BC, BU, BT, IT, IU, CD, CV, CU, IV, DW$ y $DV \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

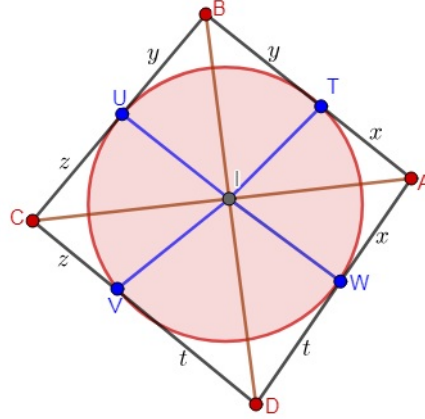


Figura 4.11: Cuadrilátero circunscriptible

Demostración. Probaremos el ítem 1.

Desde que la suma de ángulos orientados en un cuadrilátero orientado en sentido antihorario es 2π , ver (Vera Saravia Edgar, 2018),

$$\mu\angle(AW, AT) + \mu\angle(WA, WI) + \mu\angle(IW, IT) + \mu\angle(TI, TA) = 2\pi. \quad (4.6.14)$$

Cualquiera de los cuadriláteros pequeños (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario) tienen dos ángulos rectos. En particular, si usamos la afirmación 2.20, en el cuadrilátero orientado con vértices A, T, I, W en \mathbb{E}^2 ,

$$\mu\angle(WA, WI) = \mu\angle(TI, TA) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.6.15)$$

Usando lo obtenido de (4.6.15) en (4.6.14), resulta que los ángulos centrales (en sentido antihorario), son suplementarios de los ángulos internos formados en los vértices,

$$\mu\angle(AT, AW) + \mu\angle(IW, IT) = \pi \quad (4.6.16)$$

$$\therefore \mu\angle(AT, AW) = \pi - \mu\angle(IW, IT).$$

Análogamente, se prueban los ítems 2, 3 y 4. ■

Propiedad 4.37 *Si el cuadrilátero con vértices A, B, C, D en \mathbb{E}^2 , (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el cuadrilátero en el sentido antihorario) es también cíclico en la proposición 4.36, entonces los segmentos, que se forman uniendo puntos de tangencia opuestos, son ortogonales.*

Demostración. Supongamos por hipótesis que los ángulos orientados en sentido antihorario $\angle(BC, BA)$ y $\angle(DA, DC)$ están inscritos e interceptan arcos opuestos de la circunferencia, entonces

$$\mu\angle(BC, BA) + \mu\angle(DA, DC) = \pi, \quad (4.6.17)$$

con BC, BA, DA y $DC \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Aplicando el ítem 2 y el ítem 4 en la ecuación (4.6.14), nos conduce a

$$\begin{aligned} (\pi - \mu\angle(IT, IU)) + (\pi - \mu\angle(IV, IW)) &= \pi \\ \Rightarrow \mu\angle(IT, IU) + \mu\angle(IV, IW) &= \pi. \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

Dado que una vuelta completa en sentido antihorario, tiene una medida de 2π , se sigue de (4.6.18), figura 4.11:

$$\mu\angle(IU, IV) + \mu\angle(IW, IT) = \pi. \quad (4.6.19)$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} TV.UW &= (TI + IV).(UI + IW) \\ \Rightarrow TV.UW &= TI.UI + TI.IW + IV.UI + IV.IW \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

Usando la definición de producto interno en la ecuación (4.6.20):

$$\begin{aligned} TV.UW &= \|IT\|\|IU\|(\cos \mu\angle(IT, IU) - \cos \mu\angle(IT, IW) - \\ &\quad \cos \mu\angle(IV, IU) + \cos \mu\angle(IV, IW)) \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Usando las ecuaciones (4.6.18) y (4.6.19) en (4.6.21):

$$\begin{aligned} TV.UW &= \|IT\|\|IU\|(-\cos \mu\angle(IV, IW) + \cos \mu\angle(IV, IU) - \\ &\quad \cos \mu\angle(IV, IU) + \cos \mu\angle(IV, IW)) \\ &\quad \therefore TV.UW = 0 \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

■

4.7. Ángulo entre circunferencias

Definición 4.38 *El ángulo orientado que forman dos circunferencias secantes, es el ángulo orientado que forman sus tangentes en cualquiera de sus puntos de intersección.*

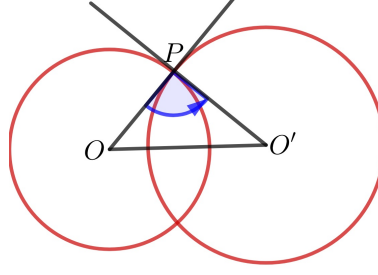


Figura 4.12: Circunferencias secantes

Proposición 4.39 Sea un punto y arbitrario $X \in \mathbb{E}^2$. Si las circunferencias $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son secantes en P y $P' \in \mathbb{E}^2$ entonces

$$\cos \mu \angle (PO, PO') = \frac{r^2 + (r')^2 - (XO^2 - (XO')^2)}{2rr'}$$

siendo PO y $PO' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Demostración. Por hipótesis, el punto $P \in \mathbb{E}^2$ debe satisfacer la ecuación de ambas circunferencias:

$$\begin{aligned} (XP - XO)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow XP^2 - 2XP.XO + O^2 &= r^2 \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

y

$$\begin{aligned} (XP - XO')^2 &= (r')^2 \\ \Rightarrow XP^2 - 2XP.XO' + (XO')^2 &= (r')^2. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Sumando las ecuaciones (4.7.1) y (4.7.2):

$$2XP^2 - 2XP.(XO + XO') + XO^2 + (XO')^2 = r^2 + (r')^2. \quad (4.7.3)$$

luego su coseno es:

$$\begin{aligned} \cos \mu \angle (PO, PO') &= \frac{PO.PO'}{\|PO\| \|PO'\|} = \frac{(XO - XP).(XO - XP')}{\|PO\| \|PO'\|} \\ \Rightarrow \cos \mu \angle (PO, PO') &= \frac{XP^2 - XP.(XO + XO') + XO.XO'}{rr'}. \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Sustituyendo (4.7.3) en (4.7.4):

$$\cos \mu \angle (PO, PO') = \frac{r^2 + (r')^2 - (O - O')^2}{2rr'} \quad (4.7.5)$$

■

Observación 4.40 El coseno de un ángulo recto es cero, por lo tanto, si $\mu\angle(PO, PO') = \frac{\pi}{2}$ en (4.7.5), entonces decimos que las circunferencias son ortogonales si y solo si $r^2 + (r')^2 = (O - O')^2$, lo último es conocido como el Teorema de Pitágoras.

4.8. Eje radical de dos circunferencias

Definición 4.41 El eje radical de dos circunferencias con centros O y $O' \in \mathbb{E}^2$ y radios r y r' positivos respectivamente, es el lugar de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a ambas circunferencias

$$(OP)^2 - r^2 = (O'P)^2 - (r')^2$$

siendo OP y $O'P \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

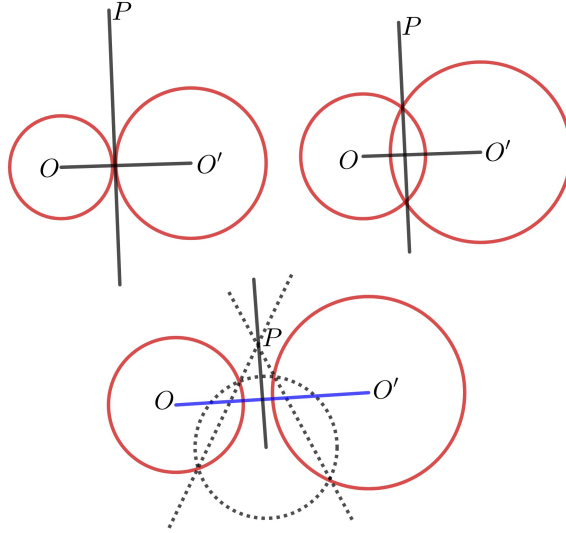


Figura 4.13: Eje radical de dos circunferencias

Sea $X \in \mathbb{E}^2$, la intersección del eje radical con el segmento que une ambos centros de las circunferencias,

$$(OX)^2 - r^2 = (O'X)^2 - (r')^2. \quad (4.8.1)$$

Agrupando términos semejantes en (4.8.1) y usando la identidad algebraica conocida como *diferencia de cuadrados*, ver (Calvet, 2007):

$$(OX + O'X) \cdot (OX - O'X) = r^2 - (r')^2 \quad (4.8.2)$$

siendo $OX, O'X \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$

Considerando un punto fijo y arbitrario $Y \in \mathbb{E}^2$ en la ecuación (4.8.2) nos conduce a

$$2 \left(YX - \frac{YO + YO'}{2} \right) . OO' = r^2 - (r')^2. \quad (4.8.3)$$

Ya que los vectores OX y $O'X$ son proporcionales a $OO' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, el producto interno y externo son equivalentes al producto geométrico, ver (Vera Saravia, 2016). Por consiguiente se puede despejar YX de (4.8.3):

$$YX = \frac{YO + YO' + (r^2 - (r')^2)(OO')^{-1}}{2}. \quad (4.8.4)$$

Ahora buscaremos qué tipo de figura geométrica es el eje radical. Agrupando los términos se obtiene:

$$2 \left(YP - \frac{YO + YO'}{2} \right) . OO' = r^2 - (r')^2. \quad (4.8.5)$$

Despejando $\frac{YO + YO'}{2} \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ en (4.8.4) y reemplazándolo en (4.8.5):

$$\begin{aligned} 2(YP - YX + \frac{(r^2 - (r')^2)(OO')^{-1}}{2}) . OO' &= r^2 - (r')^2 \\ \Rightarrow 2(YP - YX) . OO' &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, el eje radical es una línea que pasa a través de X y es perpendicular a la línea que une ambos centros. Si las circunferencias se intersectan, entonces el eje radical es la línea que pasa a través de los puntos de intersección.

Definición 4.42 *El centro radical de tres circunferencias es la intersección de sus ejes radicales.*

Consideremos un punto fijo y arbitrario $Z \in \mathbb{E}^2$. Sean O, O' y $O'' \in \mathbb{E}^2$ los centros de tres circunferencias con radios r, r' y r'' positivos, respectivamente. Denotamos con $X \in \mathbb{E}^2$, la intersección del eje radical de la primera y segunda circunferencia con $OO' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ y sea $Y \in \mathbb{E}^2$ la intersección del eje radical de la segunda y tercera circunferencia con $O'O''$. Luego el centro radical $P \in \mathbb{E}^2$ debe cumplir la ecuación formada para ambos ejes radicales,

$$(ZP - ZX) . OO' = 0. \quad (4.8.6)$$

y

$$(ZP - ZY) . O'O'' = 0. \quad (4.8.7)$$

Sustituyendo $ZX \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$, obtenido en (4.8.4), y reemplazándolo en (4.8.7):

$$ZP . OO' = ZX . OO' = \frac{(ZO')^2 - ZO^2 + r^2 + (r')^2}{2}. \quad (4.8.8)$$

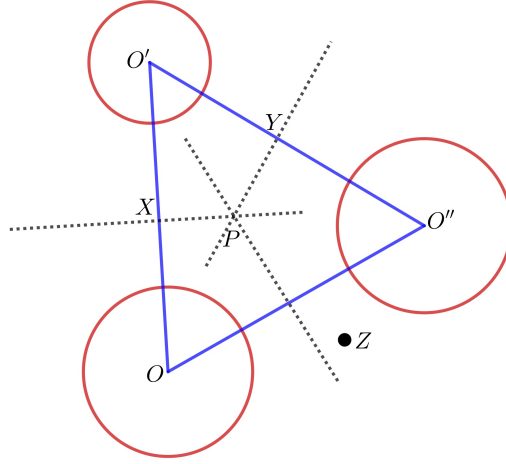


Figura 4.14: Eje radical de tres circunferencias

Análogamente para ZY :

$$ZP.O'O'' = ZY.O'O'' = \frac{(ZO'')^2 - (ZO')^2 + (r')^2 - (r'')^2}{2}. \quad (4.8.9)$$

Ahora hemos encontrado los coeficientes de la combinación lineal de una descomposición imaginaria. Este proceso fue explicado para el cálculo del ortocentro. Sin embargo existe una diferencia: No queremos encontrar el vector en componentes ortogonales pero de los coeficientes conocidos queremos reconstruir el vector ZP . Entonces:

$$ZP = \frac{ZP.O'O''}{OO' \uparrow O'O''} OO' - \frac{ZP.OO'}{OO' \uparrow O'O''} O'O''. \quad (4.8.10)$$

La sustitución de los valores conocidos de los coeficientes (4.8.8) y (4.8.9) en (4.8.10), da como resultado la siguiente fórmula para el centro radical, el cual es invariante bajo permutación cíclica de los vértices:

$$ZP = (2OO' \uparrow O'O'')^{-1}$$

$$[((ZO'')^2 - (r'')^2)OO' + (ZO^2 - r^2)O'O'' + ((ZO')^2 - (r')^2)O''O]$$

con OO', OO'' y $O'O'' \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$.

Capítulo 5

Sobre la trigonometría

La palabra trigonometría significó originalmente medición de triángulos. Como tal se empezó estableciendo relaciones entre los ángulos, lados y área de un triángulo y en particular definiendo lo que se llamaron las razones trigonométricas. Esto servirá de preámbulo para deducir las identidades básicas en estrecha conexión con hechos geométricos básicos.

5.1. Suma de ángulos orientados de un polígono

En esta sección, revisaremos el teorema de la Suma de Ángulos Orientados de un Polígono desde el punto de vista del Álgebra Geométrica Bidimensional.

Usaremos el Álgebra Geométrica Afín para dar una demostración algebraica del siguiente resultado

Teorema 5.1 *En todo polígono convexo de $n \geq 3$ lados la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a $\pi(n - 2)$.*

Demostración. Para una demostración ver (Barker and Howe, 2007). ■

A seguir, se presenta una nueva demostración del teorema anterior reescrito en el contexto del álgebra geométrica bidimensional.

Teorema 5.2 *Denotando con $A_j \in \mathbb{E}^2$, $1 \leq j \leq n$, los vértices del polígono convexo (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el polígono en sentido antihorario y con α_j el ángulo interior positivamente orientado) correspondiente al vértice A_j , lo que*

debemos demostrar es

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = \pi(n-2). \quad (5.1.1)$$

Demostración. Dados los vectores libres no nulos $AB \in T_A \mathbb{E}^2$ y $XY \in T_X \mathbb{E}^2$ se cumple:

$$(AB)(XY) = \|AB\| \|XY\| e^{\theta i} \quad (5.1.2)$$

donde $\theta = \mu\angle(\underline{AB}, \underline{XY}) \in]-\pi, \pi]$ (ángulo orientado).

Para la aplicación que vamos a presentar conviene reescribir la identidad Geométrica de Euler Afin (5.1.2) del siguiente modo:

Dados los vectores libres no nulos $AB \in T_A \mathbb{E}^2$ y $XY \in T_X \mathbb{E}^2$ se cumple:

$$\frac{(AB)(XY)}{\|AB\| \|XY\|} = e^{\theta i}. \quad (5.1.3)$$

Veamos ahora la demostración de (5.1.1) para el caso de un triángulo:

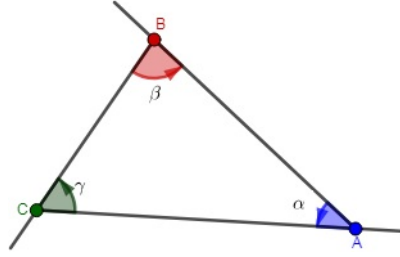


Figura 5.1: Suma de ángulos orientados de un polígono

Con

$$\alpha = \mu\angle(\underline{AB}, \underline{AC}), \quad \gamma = \mu\angle(\underline{CA}, \underline{CB}) \quad \text{y} \quad \beta = \mu\angle(\underline{BC}, \underline{BA})$$

Aplicando tres veces la identidad (5.1.3), resulta

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} &= e^{\alpha i} e^{\beta i} e^{\gamma i} = \frac{(AB)(AC)}{\|AB\| \|AC\|} \frac{(BC)(BA)}{\|BC\| \|BA\|} \frac{(CA)(CB)}{\|CA\| \|CB\|} = \\ &= \frac{(BC)(BA)}{\|BC\| \|BA\|} \frac{(AB)(AC)}{\|AB\| \|AC\|} \frac{(CA)(CB)}{\|CA\| \|CB\|} = -1 \end{aligned}$$

Para simplificar hemos usado la anticonmutatividad $XY = -YX$ y de la identidad de Euler (5.1.2), $(XY)(XY) = \|XY\|^2$.

Podemos entonces concluir que para el caso de un triángulo; es decir $n = 3$,

$$e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = -1 \longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi = (3-2)\pi$$

Para el caso $n > 3$ usaremos el proceso de inducción.

Considerando el segmento que une los vértices A_2 y A_n tendremos un triángulo T que une los vértices A_1 , A_2 y A_3 y un polígono convexo P de $n - 1$ lados, que une los vértices A_2 , A_3, \dots, A_n . Hecho esto, aplicando inducción tendremos que la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono convexo de n lados, $\pi(n - 2)$ resulta de sumar $\pi(n - 1 - 2)$ (la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono convexo P de $n - 1$ lados) con π (la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo T).

■

Proposición 5.3 Sean $u, v \in S^1 := \{w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| = 1\}$, linealmente independientes y $\theta = \mu\angle(u, v) \in \mathbb{R}$, entonces $\sin \mu\angle(u, v) = -(u \uparrow v)i$ y $\cos \mu\angle(u, v) = u.v$

Demostración. Para una demostración, ver (Vera Saravia, 2016).

■

Capítulo 6

Conclusiones

Todos los resultados expuestos en el presente trabajo permiten explicar el nombre Álgebra Geométrica, dado por William K. Clifford, que fue creado entre los años 1873 y 1879.

1. La estructura afín del espacio euclideo bidimensional nos ha permitido, por ejemplo, matematizar la suma de vectores libres (1.5.3) mediante la suma de vectores en \mathbb{R}^2 .
2. El Álgebra Geométrica AG(2) amplía y optimiza la relación álgebra-geometría y torna mucho más amigable el conocimiento y uso de los complejos. Nos ha permitido, por ejemplo, presentar la Identidad Geométrica de Euler (1.5.4), llamada así porque, considerando u y v unitarios se obtiene la conocida identidad de Euler

$$e^{\theta i} = \cos \theta + (\sin \theta)i, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (6.0.1)$$

cuyo caso particular (u unitario y $v = -u$, en cuyo caso $\theta = \mu \angle(u, -u) = \pi$) es la famosa Ecuación de Euler, conocida desde antes de 1748,

$$e^{\pi i} + 1 = 0. \quad (6.0.2)$$

3. El producto geométrico de AG(2) permite algebrizar no solo el concepto geométrico de ortogonalidad, ver (1.5.7), sino también los conceptos de paralelismo, ver (1.5.8), base ortonormal y las reflexiones en \mathbb{R}^2 .

En este proceso se redefine el producto interior de vectores: $u.v = \frac{1}{2}(uv + vu)$, que algebriza la ortogonalidad. Se introduce el producto exterior de los mismos:

$u \uparrow v = \frac{1}{2}(uv - vu)$, algebriza el paralelismo y finalmente obtiene la relación unificadora $uv = u.v + u \uparrow v$.

4. Existen muchos productos que tratan de expresar nociones geométricas, como por ejemplo, el producto vectorial o cruz, sin embargo, el producto geométrico o producto de Clifford simplifica y sintetiza los productos mencionados y por tanto reúne sus significados geométricos.
5. El aspecto avanzado de los espacios afines, reside en el hecho de que se trata de un tipo de variedad con una característica muy particular: Tanto la variedad como su fibrado tangente son representados en el mismo ambiente. Lo que permite trasladar paralelamente vectores libres a un mismo punto de origen.
6. Finalmente, se demostró con algunos ejemplos el potencial del álgebra geométrica para simplificar significativamente las demostraciones de teoremas que incluyen objetos geométricos euclidianos.

Bibliografía

- Artin, E. (2016). *Geometric algebra*. Courier Dover Publications.
- Barker, W. H. and Howe, R. (2007). *Continuous symmetry: from Euclid to Klein*. American Mathematical Soc.
- Berger, M. (2009). *Geometry I*. Springer Science & Business Media.
- Calvet, R. G. (2007). Treatise of plane geometry through geometric algebra. Recuperado de: <http://campus.uab.es/PC00018>.
- Catoni, Boccaletti, R. V. y. P. (2011). *Geometry of Minkowski Space-Time*. Springer.
- Hestenes, D. (2012). *New foundations for classical mechanics*, volume 15. Springer Science & Business Media.
- Klein, F. (2006). Matemática elemental desde un punto de vista superior.
- Marín, J. S. (2000). *Geometría Plana, Sólida, Analítica y Vectorial*. Expertisa.
- Moise, E. E. (1990). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Addison-Wesley.
- Vera Saravia, E. (2016). Guías de trabajo para seminarios en Álgebra geométrica. Notas de Divulgación.
- Vera Saravia Edgar, Z. R. H. (2018). Sobre el Álgebra geométrica bidimensional. *Selecciones Matemáticas*, 5(2):241–278.
- Yaglom, I. M. (2009). *Números complejos y sus aplicaciones a la geometría*. Editorial URSS Moscú.